BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE

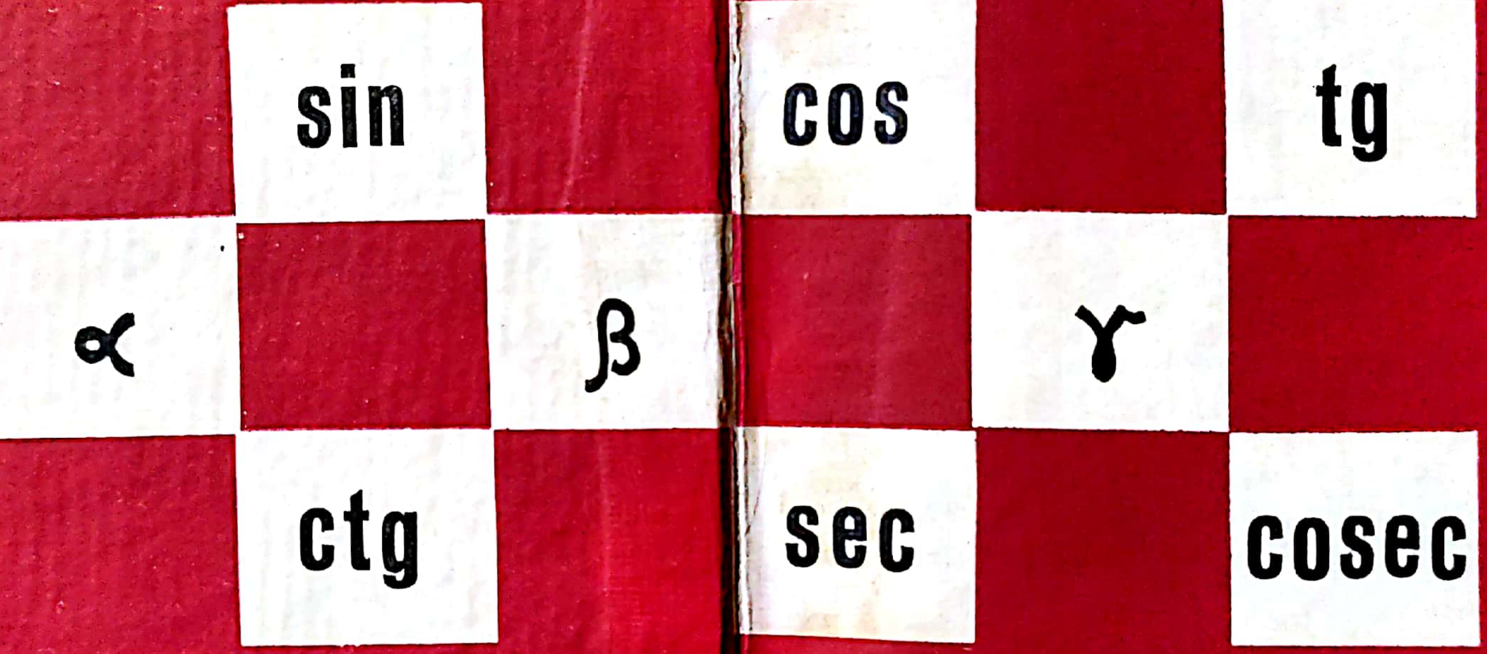
C. IONESCU-ȚIU

M. VIDRAȘCU

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE TRIGONOMETRIE



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1969


sin
cos
tg
α
β
γ
ctg
sec
cosec

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE

IONESCU — ȚIU M. VIDRAȘCU

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

pentru licee, școli profesionale și pentru examenul de admitere în învățămîntul superior

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1969

PREFAȚĂ

Lucrarea de față cuprinde exerciții și probleme de trigonometrie plană din materia de liceu, grupate pe capitole, pentru a fi folosită de elevii și absolvenții care se pregătesc pentru admiterea în facultăți.

Un număr mare de aplicații variate cu diferite grade de dificultate sînt compuse de autori, altele sînt din cele publicate în Gazeta matematică seria B, din alte periodice apărute în țară, sau date la examenele de admitere în învățămîntul superior și la concursuri. La unele enunțuri s-a trecut prescurtat inițialele revistei, ale autorului și anul publicării problemei respective.

In prima parte se găsesc enunțurile, pentru ca elevul să încerce rezolvarea fără a folosi indicațiile și soluțiile, care se găsesc cu același număr de ordine în partea a doua. Elevii sînt sfătuiți să încerce și alte soluții în afara celor publicate.

Soluțiile fiind independente unele de altele, încercarea rezolvării problemelor se poate face de către elev și în altă ordine decît cea din enunțuri și apoi să revină asupra problemelor pe care nu le-a putut rezolva inițial. Cercetarea indicațiilor și soluțiilor poate după aceea să ofere și alte metode de rezolvare și chiar să stabilească unele generalizări.

AUTORII

CUPRINS

NOTĂ. Problemele prezentate de autori sînt repartizate pe capitole astfel: de M. Vidrașcu *1* (54—57, 61—67); *2* (2, 5, 7, 11—15, 67, 78); *3* (4, 6, 26, 47, 51, 56, 61, 71, 86, 108—111, 113—122, 126, 127, 134); *4* (6—9, 12—18, 20, 21, 91—99, 113); *5* (2, 4, 16, 17, 24, 44, 45, 48, 79—87, 103—113); *6* (18—43, 46—88, 90—97, 99—101); *7* (1—25, 53, 54); *8* (3—11, 13—16, 18—22, 40—44, 58—71); *9* (1—25, 27, 30, 39—57, 69, 86); *10* (1—24, 32—76, 96—108), *11* (1—13, 28—34); *12* (20—41), iar restul de C. Ionescu-Țiu.

La unele enunțuri ale problemelor care au mai fost publicate în diferite reviste de matematică, s-a trecut prescurtat inițialele revistei, ale autorului și data publicării problemei. Astfel s-a notat: G.M.B (Gazeta matematică seria B); S.G.M. (Suplimentul gazetei matematice); R.M.T. (Revista matematică din Timișoara); P (Revista Pitagora); N (Revista Numerus); iar prin C.D.P. V.Cristescu (Culegerea de probleme de trigonometrie de V. Cristescu).

UNGHIURI, ARCE. RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE ARCELOR DIN DIFERITE CADRANE. RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAȘI ARC. RELAȚII ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI DREPTUNGHIC. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA VECTORILOR. PROIECȚII.

1.1. Să se calculeze în grade, minute și secunde sexagesimale, măsura arcului de un radian.

1.2. Să se calculeze în radiani unghiul la centru corespunzător arcului de un grad sexagesimal.

1.3. Să se exprime în grade vechi, în grade noi* și în radiani suplimentul unghiului de $\frac{11\pi}{10}$ radiani.

1.4. Să se exprime unghiul de $57°17'44''$ în grade centesimale.

1.5. Să se exprime în radiani unghiul de 60^g (grade centesimale).

1.6. Să se exprime în grade sexagesimale unghiul de 35^g.

1.7. Care este arcul mai mic decît 360° ale cărui extremități coincid cu ale arcului de 1968°?

1.8. Să se afle unghiul a cărui valoare în grade centesimale întrece cu 8 valoarea sa în grade sexagesimale.

1.9. Diferența a două unghiuri este de 10 grade centesimale, iar suma lor este de 81 grade sexagesimale. Care sînt cele două unghiuri.

1.10. Care sînt unghiurile exprimate în grade sexagesimale, care luate în valoare absolută sînt suplimentare, pe cînd în valoare relativă sînt complementare?

1.11. Dîndu-se $\sin a = \frac{3}{5}$, să se construiască unghiul a. Apoi să se afle toate funcțiile trigonometrice ale unghiului a, dacă $90° < a < 180°$.

1.12. Să se arate că:

$$\sin x \operatorname{tg} x + \cos x = \sec x.$$

1.13. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{tg}^6 x.$$

* Gradele centesimale se mai numesc și grade noi, iar gradele sexagesimale se mai numesc grade vechi.

1.14. Să se arate că:

$$(1 + \text{tg } a)^2 + (1 + \text{ctg } a)^2 = (\sec a + \text{cosec } a)^2.$$

1.15. Să se arate că:

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = \sqrt{2(1 + \cos x)}, \text{ pentru } \cos x \geqslant 0 \text{ și}$$

$$\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2(1 + \sin x)}, \text{ pentru } \sin x \geqslant 0.$$

1.16. Să se afle toate valorile lui x pentru care:

$$\frac{1}{1 - \text{tg}^2 x} + \frac{1}{1 - \text{ctg}^2 x} = 1.$$

1.17. Să se arate că:

$$\left[\frac{(1 + \text{ctg } x)^2 - (1 + \text{tg } x)^2}{(1 + \text{ctg } x)^2 + (1 + \text{tg } x)^2}\right]^2 + \left(\frac{\text{ctg } x}{1 + \text{ctg}^2 x} + \frac{\text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}\right)^2 = 1.$$

1.18. Să se arate că:

$$E_1 = \frac{\dfrac{1}{(1 - \sin x)^2} - \dfrac{1}{(1 + \sin x)^2}}{\dfrac{1}{(1 - \cos x)^2} - \dfrac{1}{(1 + \cos x)^2}} = \text{tg}^5 x,$$

$$E_2 = \frac{\dfrac{1}{(1 - \sec x)^2} - \dfrac{1}{(1 + \cos x)^2}}{\dfrac{1}{(1 - \cos x)^2} - \dfrac{1}{(1 + \text{cosec } x)^2}} = \text{ctg}^7 x.$$

1.19. Să se arate că:

$$\frac{1 + \text{tg}^4 x}{\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x} = \text{tg}^2 x.$$

1.20. Să se arate că dacă $\text{tg } x \neq 1$, atunci:

$$\frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} + \frac{1 + \text{ctg } x}{1 - \text{ctg } x} = 0.$$

1.21. Să se arate că pentru $a \neq \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, atunci:

$$\frac{\dfrac{1}{1 - \text{tg}^4 a} - \dfrac{1}{1 + \text{tg}^4 a}}{\dfrac{1}{1 - \text{tg}^4 a} + \dfrac{1}{1 + \text{tg}^4 a}} = \text{tg}^4 a.$$

1.22. Să se arate că pentru $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$ atunci:

$$\frac{1 + \text{tg } a}{\text{tg } a} + \frac{\text{tg } a}{1 - \text{tg } a} = \frac{1}{(1 - \text{tg } a)\,\text{tg } a}.$$

1.23. Să se arate că:

$$\cos^2 A - \sec^2 A + (1 + \cos^2 A)\,\mathrm{tg}^2 A = 0.$$

1.24. Să se arate că:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x \cos x} = 1.$$

1.25. Să se arate că:

$$\frac{1+\sin x+\cos x+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x+\sec x+\mathrm{cosec}\,x}{1+\sin x\cos x} = \frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}.$$

1.26. Să se arate că:

a) $\sin x + \cos x = \dfrac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sec x}$.

b) $(\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x)(\cos x - \sec x)(\sin x - \mathrm{cosec}\,x) = 1$,

c) $(\sin x + \cos x)(\sec x - \mathrm{cosec}\,x) = \mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x$.

1.27. Să se arate că:

$$\left(\frac{\cos x}{1\pm\sin x} - \frac{\sin x}{1\pm\cos x}\right) : \left(\frac{\cos x}{1\pm\sin x} + \frac{\sin x}{1\pm\cos x}\right) = \pm(\cos x - \sin x).$$

S.G.M. VI. 989 C.I.Ţ., 1947.

1.28. Să se arate că:

$$\frac{1+\sin^2 x}{2+\mathrm{ctg}^2 x} + \frac{1+\cos^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x} = 1,$$

$$\sin^2 x\,(1 - \mathrm{ctg}^2 x) + \cos^2 x\,(1 - \mathrm{tg}^2 x) = 0.$$

S.G.M. VI: 1032, C.I.Ţ., 1947.

1.29. Să se arate că:

$$E = (\mathrm{tg}\,x + \sec x)^2 - (\mathrm{tg}\,x + \sec x)^{-2} = 4\,\mathrm{tg}\,x \sec x.$$

1.30. Să se arate că:

$$\frac{\dfrac{1\pm\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1\pm\sin x}}{\dfrac{1\pm\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{1\pm\cos x}} = \mathrm{tg}^2 x.$$

S.G.M. VI. 1031, C.I.Ţ., 1947.

1.31. Să se arate că:

$$\mathrm{tg}^2 x + \cos^2 x = \mathrm{tg}^2 x \sin^2 x + 1,$$

$$\mathrm{ctg}\,x = \cos^2 x\,(\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x).$$

1.32. Să se arate că:

$$\frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}+\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=0.$$

G.M.B. 2021.

1.33. Să se arate că:

$$(\sin x \pm \sin y)^2+\cos^2 x \cos^2 y=(1 \pm \sin x \cdot \sin y)^2.$$

1.34. Să se arate că:

$$(\operatorname{tg}^2 a-\sin^2 a)(\operatorname{ctg}^2 a-\cos^2 a)=\sin^2 a \cos^2 a.$$

1.35. Să se arate că:

$$\frac{1}{(1-\operatorname{tg} a \pm \sec a)(1-\operatorname{tg} b \pm \sec b)}+\frac{\operatorname{ctg} a-\operatorname{ctg} b}{1+(\operatorname{tg} a+\sec a)(\operatorname{tg} b+\sec b)}=$$

$$=\frac{1}{(1+\operatorname{tg} a \mp \sec a)(1+\operatorname{tg} b \mp \sec b)}.$$

Pitagora VI: 227 C.I.Ț., 1938.

1.36. Să se arate că:

$$\sin^2 a \cos b-\sin^2 b \cos a=(\cos b-\cos a)(1+\cos a \cos b),$$

$$\operatorname{cosec} a \operatorname{ctg}^2 b-\operatorname{cosec} b \operatorname{ctg}^2 a=(\operatorname{cosec} b-\operatorname{cosec} a)(1+\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b).$$

$$\operatorname{cosec}^2 a-\sin^2 a=(1+\sin^2 a)\operatorname{ctg}^2 a.$$

P. VI: 343. C.I.Ț., 1939.

1.37. Să se arate că:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1\right)=$$

$$=\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

P. VI: 319. C.I.Ț., 1939.

1.38. Să se arate că:

$$(\sin^4 x-\sin^2 x+1)^2=(\cos^4 x-\cos^2 x+1)^2.$$

1.39. Să se arate că expresia:

$$E=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$$

este independentă de x.

1.40. Să se arate că:

$$(\mathrm{tg}^4 a - 6\,\mathrm{tg}^2 a + 1)\cos^4 a = 1 - 8\sin^2 a \cos^2 a.$$

1.41. Să se arate că:

$$\mathrm{cosec}^4 a + \mathrm{ctg}^4 a = 1 + 2\,\mathrm{ctg}^2 a\,\mathrm{cosec}^2 a.$$

1.42. Să se arate că

$$\sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a = \sec^2 a\,\mathrm{cosec}^2 a.$$

1.43. Să se arate că:

$$(\mathrm{tg}^2 x + \sec^2 x)(1 + 16\,\mathrm{tg}^2 x \sec^2 x) = 15(\mathrm{tg}^4 x - \sec^4 x) + 16(\mathrm{tg}^6 x + \sec^6 x).$$

1.44. Să se arate că expresia:

$$E = \sin^8 x - \cos^8 x + 4\cos^6 x - 6\cos^4 x + 4\cos^2 x$$

este independentă de x.

1.45. Să se arate că:

$$\frac{\mathrm{tg}\ a + \sec a - (\mathrm{tg}\ a + \sec a)^{-1}}{\mathrm{tg}\ a + \sec a + (\mathrm{tg}\ a + \sec a)^{-1}} = \sin a.$$

Pitagora VI 258, C.I.Ț., 1938.

1.46. Să se arate că:

$$\frac{(1+\sin x)^{-3} + (1-\sin x)^{-3}}{(1+\cos x)^{-3} + (1-\cos x)^{-3}} = \frac{1 + 3\sin^2 x}{1 + 3\cos^2 x}\cdot \mathrm{tg}^6 x.$$

1.47. Să se arate că:

$$\frac{(1-\cos x)^{-3} - (1+\cos x)^{-3}}{(1-\sin x)^{-3} - (1+\sin x)^{-3}} = \frac{(3+\cos^2 x)\cos^7 x}{(3+\sin^2 x)\sin^7 x}.$$

G.M.B. 6243, C.I.Ț., 1964.

1.48. Să se arate că:

$$\frac{(1-\cos x)^{-3} + (1+\cos x)^{-3}}{(1-\sin x)^{-3} - (1+\sin x)^{-3}} = \frac{(1+3\cos^2 x)\cos^6 x}{(3+\sin^2 x)\sin^7 x}.$$

1.49. Un cerc de rază r se rotește în jurul unei axe din același plan, centrul cercului descriind un cerc de rază $R > r$. Aria acestui corp de rotație, numit tor, constituie canalul unui lagăr, în care sînt așezate n bile una după alta, bilele vecine fiind tangente între ele și tangente canalului.

Să se exprime raza unei bile în funcție de R și n. Care este raza ρ a cercului pe care se află punctele de contact dintre bile.

G.M.B. 6186, C. Ionescu-Țiu, 1965.

1.50. Un rulment este format din două inele concentrice avînd între ele un număr întreg n de bile egale, tangente celor vecine și tangente inelelor. Notăm cu r raza cercului interior, R raza inelului exterior.

Să se arate că:

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}.$$

1.51. Să se stabilească egalitatea:

$$\text{tg } 15° \text{ tg } 35° \text{ tg } 55° \text{ tg } 75° = 1.$$

1.52. Să se arate că:

$$\frac{1 - \cos x + \sin^2 x}{2 + \cos x} + \frac{1 + \cos x + \sin^2 x}{2 - \cos x}$$

nu depinde de x.

I. Șt.M. G.M.B., 1951, p. 269.

1.53. Să se arate că:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a\right) = 0.$$

1.54. Se dă $\sin x + \cos x = a$.

Să se găsească $\sin^5 x + \cos^5 x$.

1.55. Se dă un triunghi dreptunghic ABC, în care $\sphericalangle B = 30°$ și perimetrul egal cu 150 cm. Să se calculeze celelalte elemente ale triunghiului.

1.56. Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care $\sphericalangle C = 22°30'$ și $a - c = 20$ cm.

1.57. Să se calculeze unghiurile unui triunghi dreptunghic în A, știind că:

$$a + b = 3c.$$

1.58. Să se afle raportul dintre ariile poligoanelor regulate cu cîte n laturi, respectiv circumscris și înscris unui cerc de rază R și raportul perimetrelor.

1.59. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, cunoscînd $b + c = 6$m, $\text{tg } B = 4 \cos^2 C$, $A = 90°$.

1.60. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Perpendiculara în C pe ipotenuza BC taie pe AB în D; perpendiculara în D pe CD taie pe AC în E; perpendiculara în E pe DE taie pe AB în F; iar perpendiculara în F pe EF taie pe AC în G.

Perpendiculara în B pe BC taie pe AC în I, perpendiculara în I pe BI taie pe AB în J; perpendiculara în J pe IJ taie pe AC în K, iar perpendiculara în K pe JK taie pe AB în L.

Să se arate că $\text{tg}^5 (ACB) = \text{tg } (AGB)$.

1.61. În paralelogramul $ABCD$ notăm vectorii $\overline{AB} = \overline{a}$ și $\overline{AD} = \overline{b}$. Să se exprime în funcție de $\overline{a}$ și $\overline{b}$ vectorii $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ și $\overline{MD}$, în care M este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

1.62. Fie paralelogramul $ABCD$ și vectorii $\overline{AB} = \overline{a}$ și $\overline{AD} = \overline{b}$. Să se verifice identitățile:

$$1)\ (\overline{a} + \overline{b}) + (\overline{a} - \overline{b}) = 2\,\overline{a},$$

$$2)\ (\overline{a} + \overline{b}) - (\overline{a} - \overline{b}) = 2\,\overline{b},$$

$$3)\ \overline{a} + (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{b},$$

$$4)\ \frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2},$$

$$5)\ \frac{\overline{a} - \overline{b}}{2} + \overline{b} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2},$$

$$6)\ \left(\overline{a} + \frac{\overline{b}}{2}\right) - \left(\overline{b} + \frac{\overline{a}}{2}\right) = \frac{\overline{a} - \overline{b}}{2},$$

$$7)\ \left(\overline{a} + \frac{\overline{b}}{2}\right) + \left(\overline{b} + \frac{\overline{a}}{2}\right) = \frac{3}{2}(\overline{a} + \overline{b}).$$

1.63. Fie trei vectori $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{BC} = \overline{a}$ și $\overline{CA} = \overline{b}$. Să se exprime cu ajutorul lui $\overline{a}$, $\overline{b}$ și $\overline{c}$ vectorii $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ și $\overline{CP}$, unde AM, BN și CP sînt medianele triunghiului ABC.

1.64. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Notăm $\overline{AB} = \overline{p}$ și $\overline{BC} = \overline{q}$. Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\overline{p}$ și $\overline{q}$ vectorii: $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ și $\overline{AE}$.

1.65. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Notăm $\overline{AB} = \overline{m}$ și $\overline{AE} = \overline{n}$. Să se descompună după direcțiile acestor doi vectori, vectorii $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ și $\overline{EF}$.

1.66. Fie trapezul isoscel $ABCD$, cu baza mare $AB = a$, una din laturile neparalele $AD = b$ și unghiul $A = \frac{\pi}{3}$. Să se descompună după direcțiile AB și AD vectorii $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$.

1.67. Pe trei vectori necoplanari $\overline{AB} = \overline{p}$; $\overline{AD} = \overline{q}$ și $\overline{AA'} = \overline{r}$ se construiește paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$. Să se exprime în funcție de $\overline{p}$, $\overline{q}$ și $\overline{r}$ vectorii $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AC}$, $\overline{AC'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{D'A}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{DA'}$, $\overline{BD}$, $\overline{BD'}$ și $\overline{DB'}$.

1.68. Să se arate că:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2k+1} + \cos\frac{4\pi}{2k+1} + \cos\frac{6\pi}{2k+1} + \ldots + \cos\frac{4k\pi}{2k+1} = 0.$$

C.I.Ț., (G.M.B.).

1.69. Fie un poligon regulat $A_1 A_2 \ldots A_n$ înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că:

$$\sin(A_1OA_2) + \sin(A_1OA_3) + \ldots + \sin(A_1OA_n) = 0,$$

$$\operatorname{tg}(A_1OA_2) + \operatorname{tg}(A_1OA_3) + \ldots + \operatorname{tg}(A_1OA_n) = 0,$$

$$\cos(A_1OA_2) + \cos(A_1OA_3) + \ldots + \cos(A_1OA_n) = \frac{(-1)^n - 1)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

IDENTITĂŢI TRIGONOMETRICE. ELIMINĂRI. INEGALITĂŢI ÎNTRE FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAŞI ARGUMENT. ARCE CARE CORESPUND UNEI FUNCŢII TRIGONOMETRICE DATE.

2.1. Să se arate că pentru $x \neq 180\,k$ avem:

$$\frac{\cos x + \sec x}{\cos x - \sec x} = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x - 1}.$$

2.2. Să se arate că:

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -2.$$

2.3. Să se arate că dacă $x \neq \frac{k\pi}{2}$, avem:

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}.$$

2.4 Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 c +$$
$$+ \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1.$$

G.M.B. 1165, N. Mihăileanu.

2.5. Să se arate că:

$$3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha).$$

2.6. Să se arate că:

$$\sin^6 x (1 + \cos^2 x) - \cos^6 x (1 + \sin^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

2.7. Să se exprime cu ajutorul lui tg α fracţia:

$$F = \frac{1}{a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha}.$$

2.8. Să se arate că:

$$\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} + \frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a} = 2,$$

pentru $a \neq 360° k + 90 \pm 45°$.

2.9. Să se afle valorile lui x cuprinse între 0 şi 360°, pentru care avem:

$$\frac{\operatorname{tg} x\,(1-\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^4}+\frac{\operatorname{ctg} x\,(1-\operatorname{ctg}^2 x)}{(1+\operatorname{ctg} x)^4}=0.$$

2.10. Să se elimine x din relaţiile:

$$a \sec x + b \operatorname{tg} x = c,$$
$$b \sec x + a \operatorname{tg} x = 1.$$

2.11. Să se elimine x între ecuaţiile:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1,$$
$$\sin x + \cos x = m.$$

2.12. Să se elimine a între ecuaţiile:

$$x \sin a - y \cos a = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
$$\frac{\cos^2 a}{m^2}+\frac{\sin^2 a}{n^2}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

2.13. Să se elimine x şi y între ecuaţiile:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c,$$
$$a \sin^2 y + b \cos^2 y = d$$

şi să se arate că:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

2.14. Să se elimine a şi b între ecuaţiile:

$$x \cos a + y \sin b = m,$$
$$x \sin b - y \cos a = n,$$
$$(x^2 + y^2)(\sin^2 a + \cos^2 b) = 2\,mn.$$

2.15. Să se elimine x şi y între ecuaţiile:

$$a^2 \cos^2 x - b^2 \cos^2 y = c^2,$$
$$a \cos x + b \cos y = n,$$
$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$$

2.16. Să se elimine x şi y din ecuaţiile:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1,$$
$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$$

2.17. Să se elimine x din relațiile:

$$\frac{\sin x}{a}+\frac{b}{\cos x}=\frac{\operatorname{tg} x}{c}+\frac{d}{\operatorname{ctg} x}=\frac{\sec x}{e}+\frac{f}{a \sec x}.$$

R.M.F. Gh. Bercea, 1953, pr. 832.

2.18. Să se arate că:

$$1-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2^2}\sin^2 x-\frac{1}{2^3}\sin^3 x+\ldots=\frac{2}{2+\sin x}.$$

G.M.B. 1957, C.I.Ț.

2.19. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2^2 x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

2.20. Să se afle toate valorile lui x pentru care:

$$\frac{1}{1-\cos 2x}+\frac{1}{1-\sec 2x}=1.$$

2.21. Să se afle toate valorile lui x pentru care avem:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} 3x}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} 3x}=1.$$

2.22. Să se afle toate valorile lui x pentru care:

$$\frac{1}{2-\sin 4x}+\frac{1}{2-4\operatorname{cosec} 4x}=\frac{1}{2}.$$

2.23. Să se afle toate valorile lui x pentru care:

$$\frac{1}{2-\cos\frac{x}{3}}+\frac{1}{2-4\sec\frac{x}{3}}=\frac{1}{2}.$$

2.24. Pentru care valori ale lui x din intervalul $[0,360°]$, există separat fiecare din egalitățile:

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{1}{1-\operatorname{ctg}^2 x}=1;\quad \frac{1}{1-\cos 2x}+\frac{1}{1-\sec 2x}=1,$$

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} 3x}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} 3x}=1;\quad \frac{1}{1+\sin 5x}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec} 5x}=1.$$

G.M.B. 6021, C.I.Ț., 1963.

2.25. Să se afle valorile lui x cuprinse între 0 și 360°, pentru care avem simultan egalitățile:

$$\frac{\text{tg } x}{1-\text{tg}^2 x}+\frac{\text{ctg } x}{1-\text{ctg}^2 x}=\frac{\text{tg } 3x}{1-\text{tg}^2 3x}+\frac{\text{ctg } 3x}{1-\text{ctg}^2 3x}=$$

$$=\frac{\text{tg } \frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2 \frac{x}{2}}+\frac{\text{ctg } \frac{x}{2}}{1-\text{ctg}^2 \frac{x}{2}}=\frac{\text{tg } \frac{3x}{2}}{1-\text{tg}^2 \frac{3x}{2}}+\frac{\text{ctg } \frac{3x}{2}}{1-\text{ctg}^2 \frac{3x}{2}}=$$

$$=\frac{\text{tg } 2x}{1-\text{tg}^2 2x}+\frac{\text{ctg } 2x}{1-\text{ctg}^2 2x}=\frac{\text{tg } \frac{3x}{4}}{1-\text{tg}^2 \frac{3x}{4}}+\frac{\text{ctg } \frac{3x}{4}}{1-\text{ctg}^2 \frac{3x}{4}}=0.$$

2.26. Să se afle valorile lui x cuprinse între 0 și 180° pentru care:

$$\frac{\sin (180^\circ - x) \text{ tg } (90^\circ - x) \sin (-x)}{\text{tg } (180^\circ - x) \cos (180^\circ - x)}=\frac{1}{2}.$$

2.27. Să se scrie mai simplu expresia

$$E=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{31\pi}{2}-x\right)+\cos (5\pi+x)-\sin (11\pi-x).$$

2.28. Să se simplifice expresiile:

$$E_1=\sin (x+300^g)+\cos (200^g-x),$$
$$E_2=\sin^2 x+\sin^2 (x+100^g).$$

2.29. Să se arate că:

$$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

Generalizare. G.M.B. 1964, p. 534.

2.30. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1+\sin (90^\circ+a)}{1+\cos (180^\circ+a)}-\frac{4}{1+\sec (360^\circ-a)}=\frac{\sec a-1}{\sec a+1}+4 \text{ ctg}^2 a.$$

2.31. Să se afle valorile lui x pentru care

$$\text{tg } x-\sqrt{\sec^2 x-1}=0.$$

2.32. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$\text{tg } x+\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=0.$$

2.33. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}+\text{cosec } x+\text{ctg } x=0.$$

2.34. Să se afle valorile lui x din intervalul (0; 360°) pentru care:

$$\sqrt{1-\cos^2 x}+\cos x\sqrt{\sec^2 x-1}=0.$$

2.35. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $(0°, 360°)$ pentru care:

$$\sin\frac{x}{2}+\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}}=0.$$

2.36. Să se afle valorile lui x din intervalul $[0°, 360°]$ pentru care:

$$\sin 5x+\sqrt{1-\cos^2 5x}=0.$$

2.37. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$\sin 3x=\sqrt{1-\cos^2 3x}.$$

2.38. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $[0°, 360°]$ pentru care:

$$\operatorname{tg} 6x+\sqrt{\sec^2 6x-1}=0.$$

2.39. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0°, 180°)$ pentru care:

$$\sqrt{1-\cos^2 5x}+\operatorname{tg} 5x\sqrt{1-\sin^2 5x}=0.$$

2.40. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{2\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{2\sin x}}+\frac{2}{\sqrt{1-\sin x}}=0.$$

2.41. Să se arate că:

$$E=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=|\sec x-\operatorname{tg} x|.$$

2.42. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$x^2-2x\sin a+\sin a=0,$$

unde a este un parametru.

2.43. Să se arate că oricare ar fi a real diferit de $\frac{k\pi}{2}$ (k întreg), avem:

$$(1-\sin a)x^2-2x\cos a+1+\sin a\geqslant 0.$$

2.44. Se dă ecuația în x:

$$(2\sin a-1)x^2-4x+4\sin a+2=0,$$

unde $a\in[0,360°]$. Să se discute natura rădăcinilor.

2.45. Să se discute rădăcinile ecuației:

$$x^2\sin\alpha+2x\cos\alpha+\sin\alpha=0,$$

cînd α variază în intervalul $[0,360°]$.

2.46. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$|1 + \operatorname{tg} x| + |1 - \operatorname{tg} x| = 2\sqrt{3}.$$

2.47. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 \cos^2 a - 2x^2(1 + \sin a \cos b) + \sin^2 b = 0.$$

2.48. Să se rezolve ecuația:

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}.$$

2.49. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$2x^2(1 - \cos a) - 2x \sin a + 1 = 0,$$

unde a este un parametru.

2.50. Dacă ecuația:

$$x^2 - 2x \cos a + \sin^2 a = 0$$

are rădăcinile reale distincte, atunci ecuația:

$$x^2 - 2x \sin a + \cos^2 a = 0$$

are rădăcinile imaginare și reciproc.

2.51. Să se discute rădăcinile ecuației:

$$x^2 - 2x \cos a + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sin^2 a) = 0$$

cînd a variază între 0 și 2π și să se rezolve pentru:

$$a = \frac{\pi}{6} \text{ și } a = \frac{11\pi}{6}.$$

2.52. Să se arate că dacă x este real, avem:

$$(1 - \sin a)x^2 - 2x \cos a + 1 + \sin a \geqslant 0.$$

În ce caz avem semnul egal?

2.53. Să se arate că oricare ar fi x real și diferit de $\frac{k\pi}{2}$ (k întreg), avem:

$$(1 + \cos a)x^2 - 2x \sin a + 1 - \cos a \geqslant 0.$$

2.54. Să se arate că oricare ar fi x real și diferit de $\frac{k\pi}{2}$ (k întreg), avem:

$$(3 + 2\cos a - 2\sin a)x^2 - 2x(\cos a + \sin a) + 1 \geqslant 0.$$

2.55. Să se arate că:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \geqslant \frac{1}{2}; \quad \sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{1}{4}.$$

2.56. Să se arate pentru care valori ale lui a și x reale avem

$$x^2 - 2x \sin a \cos a + \cos^2 a \geqslant 0.$$

2.57. Să se arate că a și x fiind reale, avem:

$$x^2 - 2x \sin a \cos a + \sin^2 a \geqslant 0.$$

2.58. Să se discute ecuația:

$$2x^3 - x^2 \sin^2 a - x \cos^2 a + m = 0$$

a și m sînt reali.

2.59. Să se arate că în corpul numerelor reale avem:

$$\sqrt{\sin^4 x - \sin^2 x + 1} = \sqrt{\cos^4 x - \cos^2 x + 1}.$$

2.60. Să se studieze semnul expresiei:

$$E = (1 - 2\sin x) \cos x \text{ cînd } 0 \leqslant x \leqslant 360°.$$

2.61. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$g(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

2.62. Se dă:

$$\sin^2 x = \frac{a}{a+b}, \quad \operatorname{tg} y = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Să se afle relația dintre x și y.

2.63. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $(0,360°)$, pentru care funcția:

$$y = \sqrt{1 + 2\sin 2x} + \sqrt{1 - 2\cos 3x}$$

are valori reale.

2.64. Să se afle cîte valori distincte ia $\cos \frac{8k\pi}{18}$ cînd k ia toate valorile întregi.

2.65. Cîte valori distincte ia $\sin \frac{7k\pi}{180}$, adică $\sin (7k)°$, cînd se ia toate valorile întregi.

2.66. Să se demonstreze că toate valorile lui $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{\sqrt{3}}$ sînt diferite între ele cînd k ia valori întregi și diferite între ele.

2.67. Să se determine arcul x pentru care:

$$\frac{1-\sin x}{1-2\sin x} < \frac{\sin x}{1-4\sin^2 x}.$$

2.68. Să se determine arcele x care satisfac în ecuația:

$$4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} > 4.$$

2.69. Să se arate că:

$$\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|} \leqslant \sin^2 x,$$

egalitatea avînd loc pentru $x = \frac{k\pi}{2}$, unde k este întreg.

G.M.B. 6467, C.I.Ț., 1964.

2.70. Fără a utiliza tabele, să se arate că:

$$\cos 36° > \operatorname{tg} 36°.$$

2.71. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul [0,360°] pentru care $\operatorname{tg} 6x \geqslant 0$.

2.72. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0 și 360° avem:

$$\sqrt{1+\sin 6x} + \sqrt{1-\sin 6x} \geqslant \sqrt{2(1-\cos 6x)}.$$

În ce caz avem egalitate.

2.73. Un arc $AB < \pi$ se împarte în n părți egale. Să se arate că:

$$\sin x < n \sin \frac{x}{n}.$$

2.74. Să se arate că dacă $x \geqslant \frac{21}{4}$, atunci:

$$\cos\frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{1+n}.$$

2.75. Să se arate că oricare ar fi $n \geqslant 3$, există inegalitatea:

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3}{4n}.$$

G.M.B. 1716, C.I.Ț.,

2.76. Să se arate valorile lui x din intervalul (0,360°) pentru care $\operatorname{tg} x < \sec x$.

2.77. Să se arate că:

$$(-1)^{n+1}\cos^{2n}x+(-1)^{n}C_n^{n-1}\cos^{2(n-1)}x+\ldots+C_n^2\cos^4 x+C_n^1\cos^2 x=$$
$$=1-\sin^{2n}x.$$

2.78. Să se afle restul împărţirii:

$$(7\sin^{31}x+8\sin^{13}x-5\sin^5 x\cos^4 x-10\sin^7 x+8\sin^5 x-2):$$
$$:[\sin^2 x-(1+\sin x)(\cos^2 x-2)].$$

fără a efectua împărţirea.

Concursul de matematică 1966. C.I.Ţ.

Capitolul 3

FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE SUMEI ȘI DIFERENȚEI ARCELOR. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE ARCELOR MULTIPLE ȘI ALE JUMĂTĂȚILOR DE ARCE. TRANSFORMAREA SUMELOR ȘI DIFERENȚELOR DE FUNCȚII ÎN EXPRESII CALCULABILE PRIN LOGARITMI. ELIMINĂRI. IDENTITĂȚI. DOMENII DE DEFINIȚIE. INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE.

3.1. Să se arate că:

$(\sin a \pm \sin b)^2 + \cos^2 a \cos^2 b = (1 \pm \sin a \sin b)^2.$

3.2. Să se arate că:

$$\frac{\cos(a+b) - \sin(a-b)}{\cos(a-b) - \sin(a+b)} = \frac{\cos b + \sin b}{\cos b - \sin b}.$$

3.3. Să se arate că:

$$\cos^2(a+b) - \cos^2(a-b) + \sin 2a \sin 2b = 0,$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a+b)\cos(a-b).$$

3.4. Să se verifice identitatea:

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b.$$

3.5. Să se arate că:

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2(a-b)} = 1 + \frac{2\cos a \sin b}{\sin(a-b)},$$

$$\frac{\cos^2 a - \sin^2 b}{\cos^2(a-b)} = 1 - \frac{2\sin a \sin b}{\cos(a-b)}.$$

3.6. Să se arate că:

$$\cos x - \cos(x + 60°) + \cos(x + 120°) = 0.$$

3.7. Să se arate că:

$$\sin^2(a+b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a+b),$$

$$\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \sin 2a \sin 2b.$$

3.8. Să se arate că:

$$\frac{\sin(a-b)\sin(a+b) + \sin a + \sin b}{\sin(a-b)\sin(a+b) - \sin a - \sin b} = \frac{\sin a - \sin b + 1}{\sin a - \sin b - 1}.$$

3.9. Să se arate că:

$$\sin^2(x+y)+\sin^2(x+2y)-2\sin(x+y)\sin(x+2y)\cos y=\sin^2 y.$$

3.10. Să se arate că:

$$(1+\operatorname{tg} a)^2+(1+\operatorname{ctg} a)^2=\frac{4(1+\sin 2a)}{\sin^2 2a}.$$

3.11. Să se arate că:

$$\frac{1}{\cos^2 15^\circ}+\frac{1}{\sin^2 15^\circ}=16.$$

3.12. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}(45^\circ-A)=\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\sec 2A-\operatorname{tg} 2A.$$

Caz particular $A=30^\circ$,

N.G. 356. C.I.Ț., 1937.

3.13. Să se arate că:

$$\sec 2x+\operatorname{tg} 2x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\operatorname{tg}(45^\circ+x).$$

$$\cos 2x(\operatorname{ctg} x+1)=(1+\sin 2x)(\operatorname{ctg} x-1).$$

N.G. 3454, C.I.Ț.

3.14. Să se arate că:

$$(8\cos^4 x-12\cos^2 x+5)(8\sin^4 x-12\sin^2 x+5)=4\cos^2 2x+\cos^2 4x.$$

G.M. 4669, N.M., 1936.

3.15. Să se arate că:

$$\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}-\frac{\sin a+\cos a}{\sin a-\cos a}=\frac{4}{\operatorname{ctg} a-\operatorname{tg} a}=2\operatorname{tg} 2a.$$

$$\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}+\frac{\sin a+\cos a}{\sin a-\cos a}=\frac{2}{1-2\cos^2 a}=-2\sec 2a.$$

S.G.M. VI; 453, C.I.Ț., 1939.

3.16. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b\operatorname{tg}(a+b)}=\frac{\operatorname{tg} b+\operatorname{tg}(a-b)}{1-\operatorname{tg} b\operatorname{tg}(a+b)}=\operatorname{tg} a.$$

3.17. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} a=\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a}=\frac{\sin 4a}{1+2\cos 2a+\cos 4a}=\operatorname{ctg} a-2\operatorname{ctg} 2a.$$

3.18. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot$$

S.G.M. 1 140, 1947, C.I.Ț.

3.19. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 2x + \cos^2 (x - y) - 2\cos(x - y) \cos(x + y) \cos 2x = \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y \cos (x + y).$$

3.20. Să se arate că:

$$1 + \sin 4x - \cos 4x = 2\sqrt{2} \sin 2x \cos (2x - 45°).$$

3.21. Să se arate că:

$$\frac{\sin^2 a + \sin^2 b - 1}{\cos^2(a - b)} + \frac{2 \cos a \cos b}{\cos (a - b)} = 1 \cdot$$

$$\frac{\cos^2 a + \sin^2 b + 1}{\sin^2(a - b)} - \frac{2 \sin a \cos b}{\sin(a - b)} = 1 \cdot$$

3.22. Să se arate că:

$$\cos 2x - 3\cos x + 4 = \frac{\cos 3x + 9}{2 \cos x + 3} \cdot$$

3.23. Să se arate că:

$$\sin(60° - x) = \sin x + \sqrt{3} \sin (30° - x),$$

$$\sin (120° - x) = \sin x + \sin (60° - x).$$

3.24. Să se arate că:

$$\frac{\sin^3 a}{\cos a} + \frac{\cos^3 a}{\sin a} = 2 \operatorname{cosec} 2a - \sin 2a \cdot$$

3.25. Să se arate că:

$$\frac{3 + \cos 4a - 4 \cos 2a}{3 + \cos 4a + 4 \cos 2a} = \operatorname{tg}^4 a \cdot$$

S.G.M., 134, C.I.B., 1935.

3.26. Să se verifice că:

$$\sin (x + y) \sin (x - y) + \sin (y + z) \sin (y - z) + \sin (z + x) \sin (z - x) = 0.$$

3.27. Se dă $\operatorname{tg} a = \frac{1}{4}$, $0 < a < 90°$, $2a + b = 45°$, și $\cos 4a = \sin 2b$. Să se calculeze unghiul b.

3.28. Să se arate că:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ} = 2 \cdot$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2} \cdot$$

R.M.F., 1953 pr. 950. P. Simon.

3.29. Ştiind că:

$$\frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)} = m, \quad \frac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)} = n,$$

să se arate că atunci:

$$\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)} = \frac{m+n}{1+mn} \cdot$$

3.30. Ce relaţie există între x şi y dacă

$$\sin x\sqrt{1-\sin^2 y} - \sin y\sqrt{1-\sin^2 x} + 1 = 0 \ ?$$

Caz particular: x şi y aparţin intervalului $(0,360^\circ)$.

3.31. Ce relaţie este între x şi y, dacă

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(x+y)?$$

3.32. Pentru care valori ale lui x avem pe rînd egalităţile:

$$\cos x\sqrt{1-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{1-\cos^2 x} = 1,$$

$$-\cos x\sqrt{1-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{1-\cos^2 x} = 1,$$

$$-\cos x\sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x\sqrt{1-\cos^2 x} = 1,$$

$$\cos x\sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x\sqrt{1-\cos^2 x} = 1?$$

3.33. Ce relaţie avem între x şi y dacă

$$\sin x\,|\sin y| + \cos y\,|\cos x| = -1?$$

3.34. Ce relaţie există între x şi y dacă

$$\sin x\sqrt{1-\sin^2 y} + \sin y\sqrt{1-\sin^2 x} = 0?$$

3.35. Ce relaţie algebrică există între x şi y, dacă:

$$\cos x\sqrt{1-\sin^2 y} - \sin x\sqrt{1-\cos^2 y} = 1?$$

Dar dacă:

$$\sin x \sqrt{1 - \sin^2 y} - \cos y \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1?$$

3.36. Să se afle intervalele de valori ale lui x cuprinse între 0 şi 2π, pentru care au loc simultan identităţile

$$\operatorname{tg} 4x = \sqrt{\frac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}} \text{ şi } \sec 6x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 6x} = 0.$$

G.M.B., 2345, C. Ionescu-Ţiu, 1956.

3.37. Ce relaţie există între x şi y dacă:

$$\sin x \sqrt{1 - \cos^2 y} + \cos y \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 ?$$

3.38. Ce relaţie există între x şi y dacă

$$\sin x \sqrt{1 - \cos^2 y} - \cos y \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0 ?$$

3.39. Să se stabilească identitatea:

$$E = (1 - 4\sin^2 a)(\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} a) - \sin 2a \operatorname{tg}^2 a = \sin 2a.$$

3.40. Să se arate fără tabele că:

$$\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1.$$

3.41. Se dă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{3}$.

Se cere $\sin(x + y)$; $\sin(x - y)$; $\operatorname{tg}(x + y)$.

3.42. Să se arate fără tabele că:

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 20^\circ} + \sqrt{1 - \sin 20^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 20^\circ} - \sqrt{1 - \sin 20^\circ}} = \operatorname{ctg} 10^\circ.$$

3.43. Să se arate fără tabele că:

$$\frac{\sin^2 45^\circ - \sin 27^\circ \sin 63^\circ}{\sin 18^\circ \sin 72^\circ} = \operatorname{ctg} 72^\circ.$$

3.44. Să se arate că:

$$\sin 24^\circ \cos^2 18^\circ + \sin 36^\circ \cos^2 12^\circ = \cos 12^\circ \cos 18^\circ.$$

3.45. Să se arate că:

$$[\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y)][\cos^2(x + y) + \cos^2(x - y)] =$$
$$= 1 - \cos^2 2x \cos^2 2y.$$

3.46. Să se arate că:

$$\frac{1+\operatorname{tg} a}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2 a)}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right); \frac{1-\operatorname{tg} a}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2 a)}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).$$

3.47. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(2a+b)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)} + \frac{\sin(a+2b)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)} - 4\cos(a+b) =$$

$$= \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{cosec} b \cdot (\sin^2 a + \sin^2 b).$$

3.48. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x.$$

3.49. Să se arate fără tabele că:

$$\sin 18° + \sin 30° = \cos 36°.$$

3.50. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2\cos 3x + 2\cos x - 1}{4\cos^2 x - 2\cos x - 1}.$$

3.51. Să se verifice identitatea:

$$1 + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{3-\cos 2x}{1-\cos 2x}.$$

3.52. Să se verifice identitățile:

$$\sin 4x + 2\sin 2x = 4\sin 2x \cos^2 x.$$

$$-\sin 4x + 2\sin 2x = 4\sin 2x \sin^2 x.$$

G.M.B. 1436. N.M.

3.53. Să se arate că dacă:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{7} \text{ și } \operatorname{tg} b = \frac{3}{79}, \text{ atunci:}$$

$$5a + 3b = 45°.$$

3.54. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x.$$

3.55. Să se arate că: $\frac{1}{\sin 2a} = \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 2a.$

3.56. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{2}{\sin 2a}.$$

3.57. Să se arate că:

$$\cos 2a\,(1 - 4\sin^2 2a) = 15\,(\sin^4 a - \cos^4 a) - 16\,(\sin^6 a - \cos^6 a).$$

S.G.M. 1935, C.I.Ț.

3.58. Se dă:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = m.$$

Știind că $x \in (0, 90°)$, să se exprime $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ în funcție de m.
G.M.B. 6262. I. Stănescu. 1964.

3.59. Să se arate că dacă:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}^2 c, \text{ atunci:}$$

$$\frac{\sin^2 (a + c)}{\sin^2 (b + c)} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}.$$

3.60. Să se arate că:

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \cos^2 b} + \operatorname{tg}(a + b) = \sqrt{2}\operatorname{tg}(a + b)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a - b\right)}{\cos(a - b)}.$$

3.61. Să se verifice identitatea:

$$(1 - \sin a)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \cos a.$$

3.62. Să se arate că:

$$\frac{\sin^5 x}{\cos x} + \frac{\cos^5 x}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} 2x - \frac{3}{2}\sin 2x.$$

3.63. Să se arate că:

$$\frac{1}{(1 - \operatorname{tg} a)(1 + \operatorname{tg} b)} - \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} a)(1 - \operatorname{tg} b)} = \frac{\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 b} - \frac{\operatorname{tg} 2b}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

3.64. Să se verifice identitatea:

$$\cos 2x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin^3 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} =$$

$$= \cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

3.65. Să se arate că:

$$(1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a)^2 - (\operatorname{tg} a - 2\operatorname{tg} 2a)^2 = 1.$$

N. 3529 C.I.Ț. 1938.

3.66. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\sin 2a - x \sin a}{1 + \cos 2a - x \cos a}, \quad \text{nu depinde de } x.$$

P.VI. 296, N.M., 1939.

3.67. Să se verifice identitatea:

$$\cos 2x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

3.68. Să se arate că:

$$\frac{2 \cos 3x + 2 \cos x - 1}{4 \sin^2 x + 2 \cos x - 3} = 4 \sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) \cos\left(30° - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

3.69. Să se arate că:

$$\frac{1 - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} 2a}{1 + 2 \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} 2a} = \operatorname{tg}^4 a.$$

N.G. 3538. C.I.Ț. 1938.

3.70. Să se arate că:

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{ctg} 2x \, (\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x);$$
$$\operatorname{ctg}^2 x - 1 = 2 \operatorname{ctg} 2x \, (\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x).$$

3.71. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2}.$$

3.72. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 8x}}}.$$

3.73. Să se arate că:

$$\frac{1 + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} a}{1 + \sqrt{2} + \operatorname{tg} a} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} (45° - a)}{1 + \sqrt{2} + \operatorname{tg} (45° - a)}.$$

S.G.M. VI. 323. C.I.Ț.

3.74. Să se arate că:

$$2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

3.75. Să se arate că:

$$(7 + \cos 4a)^2 = 32\,(1 + \sin^8 a + \cos^8 a).$$

G.M.B. 1954 pr. 1303, C.I.Ț.

3.76. Să se arate că:

$$[1 + (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)\sin 2x]\cos x + \cos 3x = 0.$$

3.77. Să se exprime valorile lui x din intervalul $(0°, 360°)$ care satisfac egalitatea:

$$\frac{1}{\cos 2x}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} + \sqrt{\frac{1-\cos 6x}{1+\cos 6x}} = \sqrt{\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}.$$

G.M.B. 2265, C.I.Ț.

3.78. Să se afle toate valorile lui x pentru care

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}\right)$$

și valorile lui x pentru care:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right).$$

3.79. Să se afle toate valorile lui x pentru care

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right)$$

și valorile pentru care:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}\right).$$

3.80. Să se arate că:

$$E = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{16} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{24} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{24} = 2\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 1\right).$$

3.81. Se dă $\operatorname{tg} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$. Să se calculeze expresia:

$$E = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + \sin 2x + \cos 4x.$$

3.82. Să se arate că:

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

3.83. Să se arate că:

$$\left\{\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| - \left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right| + |\operatorname{tg} x| - |\operatorname{ctg} x|\right\}^2 = 4\sec^2 2x \operatorname{cosec}^2 2x.$$

3.84. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0 și 360° avem:

$$\sqrt{\frac{(1+\sin 10x)(1-\cos 10x)}{(1-\sin 10x)(1+\cos 10x)}}+\operatorname{tg}(5x+45°)\operatorname{tg} 5x=0.$$

G.M.B. 4595. C.I.Ț. 1961.

3.85. Să se calculeze în funcție de b și c valorile lui $\cos a$ pentru care:

$$1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c=0.$$

3.86. Să se pună sub formă de produs:

$$S=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

3.87. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sin a+\sqrt{\cos 2a}}+\frac{1}{\sin a-\sqrt{\cos 2a}}=$$
$$=\frac{1}{1+\sin a}-\frac{1}{1-\sin a}=\frac{-2}{\cos a\operatorname{tg} a}.$$

3.88. Să se arate că:

$$\left(\sin a+\sqrt{-\cos 2a}\right)\left(\sin a-\sqrt{-\cos 2a}\right)+$$
$$+\left(\cos a+\sqrt{\cos 2a}\right)\cdot\left(\cos a-\sqrt{\cos 2a}\right)=1.$$

3.89. Să se arate că oricare ar fi x există egalitatea:

$$\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2-\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2=\frac{1+\sqrt{1-\sin 2x}}{1+\sqrt{1+\sin 2x}}.$$

R.M.F. C.I.Ț. 409/1951.

3.90. Să se arate că:

$$\frac{2(\sin a-\sin b)\cos(a+b)+\sin 2a-\sin 2b}{(\sin a-\sin b)\sin(a+b)+(\sin a-\sin b)^2}+2\operatorname{tg}\frac{b}{2}=0.$$

N.G. 3451. C.I.Ț. 1937.

3.91. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\operatorname{tg} x.$$

3.92. Să se arate că:

$$\sec^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x).$$

3.93. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\sec a + \sec b} = \frac{\sec b - \sec a}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2}}{1 + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}.$$

S.G.M. VI: 339, C.I.Ț. 1937.

3.94. Să se arate că

$$(1+\cos x)(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}) = \sin x (\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})$$

$$1+2 \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x = (1+\cos 2x):(1-\cos 2x) = \operatorname{ctg}^2 x.$$

N.G. 3452 C.I.Ț. 1937.

3.95. Să se arate că dacă $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

3.96. Să se arate că funcția:

$$y = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}$$

ia valoarea tg x pentru $x \in (0, 90°) \cup (270°, 450°) \cup (630°, 810°)$ și valoarea ctg x pentru $x \in (90°, 270°) \cup (450°, 630°)$. G.M.B. 1401, C.I.Ț.

3.97. Se dă funcția:

$$f(x) = \cos x |\sin x| + \sin x |\cos x|.$$

Să se arate că dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $f(x) = \sin 2x$, dacă $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $f(x) = 0$; dacă $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci: $f(x) = -\sin 2x$ și dacă $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci $f(x) = 0$.

3.98. Să se arate că dacă a și b sînt două arce din primul cadran, atunci:

$$2\left[1 + \sqrt{\sin a \sin b} - \sqrt{(1-\sin a)(1-\sin b)}\right] \cdot \left[1 - \sqrt{\sin a (1-\sin b)} + \sqrt{\sin b (1-\sin a)}\right] = (\sqrt{\sin a} + \sqrt{\sin b} + \sqrt{1-\sin a} - \sqrt{1-\sin b})^2.$$

S.G.M. VI: 433 C.I.Ț. 1937.

3.99. Să se arate că funcţia:

$$f(x)=\frac{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}-\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}+\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

ia în cele patru cadrane respectiv valorile:

$$0,\ -\operatorname{tg} 2x,\ 0,\ -\operatorname{tg} 2x.$$

3.100. Să se arate pentru care valori ale lui x avem:

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}+\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}=\frac{2}{\sin x}.$$

$$\text{b)}\ \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{2}{\cos 2x}.$$

G.M.B. 4510 C.I.Ţ. 1961.

3.101. Să se reprezinte grafic funcţiile:

$$f(x)=\sin x\,|\sin x|+\cos x\,|\cos x|,$$

$$g(x)=\sin x\,|\sin x|-\cos x\,|\cos x|.$$

3.102. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y=\sin x\,|\sec x|-\cos x\,|\operatorname{cosec} x|.$$

3.103. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y=\operatorname{tg} x\,|\sec x|+\operatorname{ctg} x\,|\operatorname{cosec} x|.$$

3.104. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}.$$

3.105. Să se arate că:

$$(T_0+T_1+T_2+\ldots+T_n).\ \sin^2 x\cos^2 x=T_1-T_{n+1},$$

$$\text{unde } T_n=\cos^{2n}x+\sin^{2n}x.$$

G.M.B. , 6707, L.Pîrşan, 1965.

3.106. Să se elimine x din relaţiile:

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=a;\quad \frac{\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}=b.$$

3.107. Să se elimine α din relaţiile:

$$x=a\cos\alpha\cos 3\alpha,$$

$$y=b\sin\alpha\sin 3\alpha.$$

3.108. Să se elimine x și y între ecuațiile:

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b,$$
$$\cos (x - y) = c.$$

3.109. Să se elimine x între ecuațiile:

$$(a - b) \sin (x + a) = (a + b) \sin (x - a),$$
$$a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - b \operatorname{tg} \frac{a}{2} = c.$$

3.110. Să se elimine x și y între ecuațiile:

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b,$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}.$$

3.111. Să se elimine x și y între ecuațiile:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a,$$
$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b,$$
$$x + y = c.$$

3.112. Să se elimine x între relațiile:

$$\frac{\sin (a - 3x)}{\sin^3 x} = \frac{\cos (a - 3x)}{\cos^3 x} = b.$$

3.113. Să se demonstreze geometric formulele:

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

3.114. Să se demonstreze geometric formula:

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

3.115. Să se demonstreze geometric formula:

$$\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b = 2 \operatorname{ctg} 2a.$$

3.116. Să se demonstreze geometric formula:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

3.117. Să se demonstreze geometric formula:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

3.118. Să se demonstreze geometric formula:

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b.$$

3.119. Să se demonstreze geometric formula:

$$\sin a+\sin b=\sin(a+b)+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

3.120. Să se arate că coarda AB subîntinsă de un unghi AMB, înscris într-o circumferință al cărei diametru este egal cu 1, este egală cu sinusul unghiului înscris.

3.121. Într-un cerc cu diametrul egal cu 1 se duc două coarde perpendiculare AC și BD care se întîlnesc în E; pe BD și AC se iau punctele F și H simetrice față de E, respectiv în raport cu B și C; se duc dreptele AF și DH care întîlnesc circumferința în L și K. Să se stabilească cu ajutorul datelor din problemă că $BD=\sin(\sphericalangle CAD+\sphericalangle BAC)=$ $=\sin(CAD)\cos(BAC)+\cos(CAD)\sin(BAC)$.

3.122. Să se demonstreze geometric formula:

$$\sin(a+b)\sin(b+c)=\sin a\sin c+\sin b\sin(a+b+c).$$

3.123. Să se dea o demonstrație geometrică a identității trigonometrice:

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}(\sec a-1)=\operatorname{tg} a.$$

3.124. În triunghiul oarecare ABC se duce bisectoarea AA'. Se duce perpendiculara $A'M$ pe AA', M fiind pe una din laturile unghiului A. Să se arate că $AM=\dfrac{2\,AB\cdot AC}{AB+AC}$.

3.125. Un triunghi este isoscel sau dreptunghic cînd:

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

3.126. Să se demonstreze geometric inegalitatea:

$$x-\sin x<\frac{x^3}{4}.$$

3.127. Să se verifice că dacă între unghiurile A, B, C ale unui triunghi există relația:

$$\sin A=2\sin B\sin C,$$

triunghiul este isoscel.

3.128. Fie două triunghiuri dreptunghice asemenea, avînd unul din unghiuri de 15°, iar cateta cea mare a triunghiului mic este egală cu cateta cea mică a triunghiului mare.

Să se arate că suma ariilor lor este dublul ariei pătratului cu latura cît lungimea catetelor egale.

N. 6.3378. C.I.Ț. 1937.

3.129. Să se arate că:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \geqslant \frac{1}{2}.$$

3.130. Să se arate că dacă $0 < a < 90°$, atunci:

$$\operatorname{ctg} a > 1 + \operatorname{ctg} 2a.$$

3.131. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{1 + 3\cos x}{1 - 2\cos x} \geqslant \frac{1 + 4\cos x}{1 - 4\cos x}$$

pe intervalul $(0,2\pi)$.

3.132. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{2\sin 30x - 1}{2\sin 30x + 1} < 0.$$

3.133. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0 și 360° avem $\sin 2x < \cos x$.

3.134. Să se determine mulțimea arcelor care satisfac inecuația:

$$\frac{\sin 2x \cdot \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x - \frac{1}{2}}{\cos^3\frac{x}{3} - 4\cos^2\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} - 4} > 0.$$

3.135. Să se arate că expresia:

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$$

se poate exprima rațional cu ajutorul lui $\sin 2x$, unde n este număr întreg pozitiv.

3.136. Să se arate că:

$$\frac{(\sqrt[n]{\cos a} + \sqrt[n]{\sec b})}{\sqrt[n]{\sec a} + \sqrt[n]{\cos b}} + \frac{\sqrt[n]{\cos a} - \sqrt[n]{\sec b}}{\sqrt[n]{\sec a} - \sqrt[n]{\cos b}} = 0.$$

N.G. 325 N.B. 1935.

3.137. Să se arate că:

$$(1 + \sec 2a)(1 + \sec 4a) \ldots (1 + \sec 2^n a) = \frac{\operatorname{tg} 2^n a}{\operatorname{tg} a}.$$

3.138. Să se arate că:

$$\operatorname{ctg} a - 2^n \operatorname{ctg} 2^n A = \sum_{k=0}^{n=1} 2^k \operatorname{tg} 2^k a,$$

folosind relația $\operatorname{ctg} 2a = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a)$.

Pitagora, S. 152, C.I.Ț. 1937.

3.139. Să se afle toate valorile expresiei:

$$E = \sin \frac{(n+1)\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4}, \quad n \text{ fiind întreg.}$$

3.140. Să se afle toate valorile expresiei:

$$E = \operatorname{tg} \frac{n\pi}{5} + \cos \frac{(n+1)\pi}{6} - \sin \frac{(n-1)\pi}{4},$$

cînd n ia toate valorile întregi.

3.141. Să se arate că:

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{\sin a - \sec b}{\operatorname{cosec} a - \cos b}\right)^n \cdot \frac{\sin^n a - \sec^n b}{\operatorname{cosec}^n a - \cos^n b} = \left(\frac{\sin^2 a + \sec^2 b}{\cos^2 b + \operatorname{cosec}^2 a}\right)^n.$$

3.142. Să se arate că:

$$16 \sin^2 x - 64 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} = \sin^2 2x.$$

3.143. Să se arate că:

$$1 \pm \sec x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x\left(\sec x \pm \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)}{\sec x \mp \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$1 \pm \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x\left(\sqrt{1 + \sin^2 x} \pm \cos x\right)}{\sqrt{1 + \sin^2 x} \mp \cos x}.$$

N.G.3453 C.I.Ț. 1937.

3.144. Să se afle toate valorile lui x pentru care:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}{\operatorname{tg} x}.$$

3.145. Să se afle toate valorile reale ale lui x pentru care avem:

$$\frac{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \frac{\sqrt{2 \sin 2x}}{\sqrt{1 - \sin 2x}}.$$

3.146. Fie a apotema unui poligon regulat convex de n laturi ($n > 10$) înscris în cercul de rază unu și fie a_2, a_3, a_4 și a_5, respectiv apotemele poligoanelor care se obțin unind vîrfurile poligonului dat din două în două, din trei în trei, din patru în patru și din cinci în cinci. Să se stabilească relația:

$$a_5 + a_4 - 2a_2 (a_2 + a_3) + a + 1 = 0 .$$

S.G.M. E. 64. C.I.Ț. 1937.

3.147. Să se calculeze produsele:

$$P_1 = \cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a ,$$

$$P_2 = \cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \ldots \cos \frac{a}{2^n} .$$

3.148. Să se arate că:

$$\sqrt{2 + 2\cos a} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos a}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos a}}} = \frac{\sin a}{\sin \frac{a}{8}} .$$

R.M.T. 1608, M. Botez, 1938.

3.149. Să se stabilească identitatea:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) \equiv 4 \operatorname{tg} 4a .$$

S.G.M. VII. C.I.Ț. 1936.

3.150. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 30°$, avem:

$2 \sin 15° \geqslant \sin x + \cos (x + 60°) \geqslant \sin 30°$ G.M.B. 1964. C.I.Ț.

Capitolul 4

IDENTITĂȚI ȘI ELIMINĂRI. SUME ȘI PRODUSE TRIGONOMETRICE. MAXIME ȘI MINIME TRIGONOMETRICE. INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE

4.1. Dacă A și B sînt cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (A - B).$$

4.2. Să se arate că:

$$4 \sin \frac{a}{3} \sin \frac{\pi + a}{3} \sin \frac{\pi - a}{3} = \sin a.$$

4.3. Să se verifice identitatea:

$$\sin x \sin y - \sin z \sin (x + y - z) = \sin (x - z) \sin (y - z).$$

4.4. Să se descompună în factori expresia:

$$E = 1 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 4x.$$

4.5. Să se arate că:

$$\sin (m + 1) x = 2 \sin mx \cos x - \sin (m - 1) x$$

$$\cos (m + 1) x = 2 \cos mx \cos x - \cos (m - 1) x.$$

4.6. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = -\sqrt{2} \sin a.$$

4.7. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} - a\right) = -\frac{\sin 2a}{\sqrt{2}}.$$

4.8. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin y + \cos (2x - y)}{\cos y - \sin (2x - y)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

4.9. Să se simplifice fracția:

$$\frac{\cos^2 7x - \cos^2 6x}{\sin^2 9x - \sin^2 4x}.$$

4.10. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 36^\circ - \operatorname{tg} 6^\circ} = \frac{\cos 6^\circ}{\cos 66^\circ}.$$

S.G.M. VI: 450. C.I.Ț. 1939.

4.11. Să se arate că:

$$\sin 5a - \sin 4a + \sin 2a - \sin a = \frac{\sin 6a}{1 + 2\cos a}.$$

4.12. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{2\cos a + \cos 5a + \cos 3a}{2\sin a + \sin 5a - \sin 3a}.$$

4.13. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E = \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{\cos x - \sqrt{3}\sin x}.$$

4.14. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(\pi - x) + 2\sin 2x + \sin 3x}{-\cos(\pi - x) + 2\cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x.$$

4.15. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x.$$

4.16. Să se verifice identitatea:

$$(\sin x + \sin 5x)(\sin 2x + \sin 6x) + (\cos x + \cos 5x)(\cos 2x + \cos 6x) = 4\cos x \cdot \cos^2 2x.$$

4.17. Să se transforme în produs expresia:

$$E = \sin 2x + 4\sin 4x + 5\sin 10x - 8\sin 4x\cos^2 3x.$$

4.18. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg} 2a + \sec 2a = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}.$$

4.19. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}.$$

4.20. Să se verifice identitatea:

$$\sin 3(b-c)\cos(b+c-2a)+\sin 3(c-a)\cos(c+a-2b)+$$
$$+\sin 3(a-b)\cos(a+b-2c)=0.$$

4.21. Să se transforme în produs expresia:

$$E=\frac{b\sin x+a\cos x}{a\sin x-b\cos x}+\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

a și b fiind numere date.

4.22. Să se arate că:

$$E=\frac{\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)}{\cos(a-b+c)+\cos(-a+b+c)}+\frac{\sin(a+b+c)+\sin(a+b-c)}{\sin(a-b+c)-\sin(-a+b+c)}=$$
$$=\frac{2\sin 2a}{\sin 2(a-b)}.$$

4.23. Să se arate că:

$$\cos(a+2b)+\cos(2a+b)+\cos(a-b)=$$
$$=4\cos\frac{a+2b}{2}\cos\frac{2a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-1.$$

4.24. Să se arate că:

$[\cos(a+b)+\cos(a-b)]^2=4\cos^2 a\cos^2 b$ și apoi să se deducă relația:

$$[\sin(a+b)+\cos(a-b)]^2=(1+\sin 2a)(1+\sin 2b)=$$
$$=4\sin^2\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(b+\frac{\pi}{4}\right).$$

C.I.Ț. R.M.F. Iunie 1950, p. 93.

4.25. Să se arate că:

$$\sin a\sin(a+x)-\sin b\sin(b+x)=\sin(a-b)\sin(a+b+x).$$

4.26. Să se transforme într-o expresie calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E=\frac{a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}+\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x-b\sin x},$$

notîndu-se $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi$.

R.M.F., 1951, pr. 480.

4.27. Să se arate că:

$$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=$$
$$=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{a+c}{2}.$$

4.28. Să se arate că:

$$\sin(b+c-a)+\sin(a+c-b)+\sin(a+b-c)-\sin(a+b+c)=$$
$$=4\sin a\sin b\sin c \text{ și}$$
$$\cos(b+c-a)+\cos(a+c-b)+\cos(a+b-c)+\cos(a+b+c)=$$
$$=4\cos a\cos b\cos c.$$

4.29. Să se arate că:

$$\sin(A+B)+\sin(A+C)+\sin(A+D)+\sin(A+B+C+D)=$$
$$=4\sin\left(A+\frac{B+C+D}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}-$$
$$-4\cos\left(A+\frac{B+C+D}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}.$$

Caz particular $D=0$, $A+B+C=\pi$.
Pitagora, S.112, C.I.Ț. 1937.

4.30. Să se arate că:

$$\cos(A+B)+\cos(A+C)+\cos(A+D)+\cos(A+B+C+D)=$$
$$=4\cos\left(A+\frac{B+C+D}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}+$$
$$+4\sin\left(A+\frac{B+C+D}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}.$$

Pitagora S.112. C.I.Ț. 1937.

4.31. Să se arate că oricare ar fi a_1, a_2, b_1, b_2, avem:

$$\cos a_1\cos(a_1+a_2+b_2)-\cos b_1\cos(b_1+a_2+b_2)=$$
$$=\cos(a_1+a_2)\cos(a_1+b_2)-\cos(b_1+b_2)\cos(b_1+a_2).$$

C.I.Ț. R.M.F. (230) 1950.

4.32. Să se transforme în produs expresia:

$$E=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-3\operatorname{tg}3x.$$

G.M.B. 5302, G.D.S. 1963.

4.33. Să se arate că:

$$2\,\frac{\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}2b-\operatorname{ctg}2a-\operatorname{ctg}2b}{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b-\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b}=1-\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}2b$$

R.M.T. 1957, C.I.Ț. 1939.

4.34. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\cos 5a+\sin 3a-\cos a}{\sin 5a-\cos 3a-\sin a}+\operatorname{tg}3a\equiv 0.$$

4.35. Să se arate că:

$$2\,\frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b + \operatorname{ctg} 2a + \operatorname{ctg} 2b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b} = \frac{\sin 4a + \sin 4b}{\sin 2a + \sin 2b}\cdot\frac{1}{\cos 2a \cos 2b}.$$

4.36. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 5a + \operatorname{tg} 7a}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 3a - \operatorname{ctg} 5a + \operatorname{ctg} 7a} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 5a \operatorname{tg} 7a.$$

4.37. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{a-\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{a-2\pi}{3} = 9\operatorname{tg}^2 a + 6.$$

R.M.T. 1003. V.A. 1930.

4.38. Să se arate că:

$$2^4 \sin\frac{\pi}{15} \sin\frac{2\pi}{15} \sin\frac{4\pi}{15} \sin\frac{7\pi}{15} = 1.$$

4.39. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 43^\circ}{\operatorname{tg} 43^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{\cos 71^\circ}.$$

P. VI. 276. C.I.Ț. 1939.

4.40. Să se arate că:

$$E = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

4.41. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ = 4 + \operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 27^\circ.$$

4.42. Să se arate că:

$$\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\sin\frac{5}{24} + \cos\frac{11\pi}{24} + \sin\frac{\pi}{6} = 4\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}.$$

4.43. Să se arate că:

$$E = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{16} + a\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{16} + a\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{16} - a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{16} - a\right) +$$

$$+ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{16} + a\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{16} + a\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{16} - a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{13} - a\right) = 8\operatorname{tg} 8a.$$

4.44. Să se arate că:

$$16\cos\left(\frac{11\pi}{24} - a\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24} - a\right)\cos\left(\frac{17\pi}{24} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{24} + a\right) =$$

$$= -\cos 4a - \sqrt{3}\sin 4a.$$

S.G.M. VII. 267. C.I.Ț. 1937.

4.45. Să se arate că:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{11\pi}{24}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{11\pi}{24}\right)$$

unde k este un întreg.

4.46. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2.$$

4.47. Să se arate că:

$$\frac{\cos 3° - 3\sin 37° - \sin 13°}{\sin 3° - 3\cos 37° + \cos 13°} = \operatorname{tg} 37°.$$

4.48. Să se arate fără tabele că:

$$\frac{5\sin 5° - 41\sin 41° + 5\cos 13°}{5\cos 5° - 41\cos 41° + 5\sin 13°} = \operatorname{tg} 41°.$$

4.49. Să se arate că:

$$2\sin 10° \sin 25° \sin 35° = \sin 5° \cos 15°.$$

$$2\sin 10° \cos 25° \cos 35° = \cos 5° \sin 15°.$$

$$\operatorname{tg} 15° \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 35° = \operatorname{tg} 5°.$$

4.50. Să se arate că:

$$\sin 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{1}{8}.$$

4.51. Să se arate că:

$$2(\cos 40° + \cos 20°) = \sqrt{3}(4\cos 25° \cos 35° - 1) = 2\sqrt{3}\cos 10°.$$

4.52. Să se arate că:

$$\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{6\pi}{16}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{16}-\sin\frac{7\pi}{16}\right)=0.$$

4.53. Să se arate că:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

4.54. Să se arate că:

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

4.55. Să se arate că:

$$\sin 4x \cos (x+30°) \cos (x-30°) = \cos x \cdot \cos 2x \sin 3x.$$

R.M.T. 1696, N.M. 1941.

4.56. Să se arate că:

$$\sin (2a-b) + \sin (2b-c) + \sin (2c-a) - \sin (a+b+c) =$$
$$= 4 \sin \frac{2a+b-c}{2} \sin \frac{2b+c-a}{2} \sin \frac{2c+a-b}{2}.$$

4.57. Să se transforme în produs expresia:

$$E = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

4.58. Să se arate că:

$$\sin^2 (a+b-c) - \sin^2 (a-b+c) + \sin (a+b-c) \sin (a-b+c) =$$
$$= \sin^2 a - \sin^2 (b-c) + \sin 2a \sin 2(b-c).$$

Pitagora VII: 63. C.I.Ț., 1937.

4.59. Să se transforme expresia:

$E = \sin x \cos 2x + \cos 3x \sin 4x + \sin 5x \cos 6x + \cos 7x \sin 8x +$
$+ \sin 9x \cos 10x$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

4.60. Să se arate că:

$$\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}.$$

6.61. Să se demonstreze că:

$$\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}.$$
$$\text{tg } 20° \text{ tg } 40° \text{ tg } 60° \text{ tg } 80° = 3.$$

4.62. Să se transforme în produs expresia:

$$E = \sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{6}.$$

4.63. Să se arate că:

$$\prod_{k=1}^{9} \sin \frac{k\pi}{20} = \frac{\sqrt{10}}{2^8}.$$

P.VI. 317, I.G. 1939.

4.64. Să se arate că dacă:

$$\text{tg}^2 a + \text{tg}^2 b = 2\text{tg}^2 x, \text{ atunci:}$$
$$\frac{\cos 2a \cos 2b + \cos (a+b) \cos (a-b)}{1 + \cos (a+b) \cos (a-b)} = \cos 2x.$$

4.65. Să se arate că dacă:

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)},$$

atunci mai există și relațiile:

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(b+c)}{\cos(b-c)} \quad \text{și} \quad \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}.$$

4.66. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$, atunci:

$$\cos 2x = \frac{\cos 2a + \cos 2b}{1 + \cos 2a \cos 2b}.$$

4.67. Să se arate că dacă:

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin(a+y)}{b} = \frac{\sin(x+2y)}{c} = \frac{\sin(x+3y)}{d},$$

atunci avem relația $(a+c)\,c = (b+d)\,b$.

4.68. Știind că $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, să se arate că:

$$\frac{(a^2+b^2)\sin 2x + 2ab}{(a^2-b^2)\sin 2x - 2ab\cos 2x} = \frac{\sin(x+\varphi)}{\sin(x-\varphi)}.$$

R.M.T. 1086, C.Ivănescu, 1932.

4.69. Să se arate că dacă $\sin 2(a+c) = n \sin 2b$, atunci:

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{tg}(a-b+c).$$

4.70. Să se elimine x din relațiile:

$$\frac{\sin x}{A} = \frac{\sin 3x}{B} = \frac{\sin 5x}{C}.$$

4.71. Să se elimine x și y din ecuațiile:

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = c.$$

4.72. Dacă $\sin b = \frac{1}{n} \sin(2a+b)$, să se arate că:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{tg} a.$$

R.M.F. 1951/223.

4.73. Ce relație există între x și y dacă:

$$\operatorname{tg} x \cos y = \cos x \operatorname{tg} y\,?$$

G.M.B., 4461, C.I.Ț, 1961.

4.74. Ce relaţie algebrică există între x şi y dacă:

$$\operatorname{tg} x \sin y + \sin x \operatorname{tg} y = 0 ?$$

4.75. Ce relaţie există între x, y, z, dacă

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z} = \frac{\sin 2z}{\sin 2y} ?$$

4.76. Ce relaţie algebrică există între x şi y dacă $\operatorname{tg} x \cos y + \cos x + \operatorname{tg} y = 0$?

G.M.B. 4461, C.I.Ţ, 1961.

4.77. Un cerc de rază egală cu unitatea se împarte în n părţi egale ($n > 4$). Notăm punctele de diviziune A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. Fie P_1 piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe OA_2, P_2 piciorul perpendicularei dusă din P_1 pe OA_3, P_3 piciorul perpendicularei dusă din P_2 pe OA_4 etc... Să se calculeze lungimea liniei frînte $A_1P_1P_2P_3 \ldots P_{n-1}$. Caz particular $n = 6$.

4.78. Să se arate că:

$$\sin a + \sin (a+r) + \sin (a+2r) + \ldots + \sin [a+(n-1)r] = \frac{\sin \frac{nr}{2} \sin \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}}.$$

4.79. Să se arate că:

$$E = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}.$$

4.80. Să se calculeze suma:

$$S = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \ldots + \cos [(2n+1)a].$$

4.81. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$

4.82. Să se arate că:

$$\sin a \sin 2a + \sin 2a \sin 3a + \sin 3a \sin 4a + \ldots + \sin na \sin [(n+1)a] = \frac{n}{2} \cos a - \frac{\cos (n+2) a \sin na}{2 \sin a}.$$

4.83. Să se arate că:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin (a+kx)}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos (a+kx)} = \operatorname{tg} \left(a + \frac{n-1}{2} x\right).$$

4.84. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x + \cos [(2k+1)x]} = \frac{\sin nx}{\cos [(n+1)x] \sin 2x}.$$

4.85. Folosind relația $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$, să se calculeze suma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin^3 ka.$$

4.86. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos k^\circ \cos (k+1)^\circ} = \frac{\operatorname{tg} (n+1)^\circ}{\sin 1^\circ}.$$

Generalizare.

4.87. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx = \frac{3}{4} \sum_{p=1}^{n} \cos px + \frac{1}{4} \sum_{q=}^{n} \cos^3 qx;$$

unde k, p, q sînt numere naturale.
G.M.B. 5751, 1963.

4.88. Să se arate că:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x + \cos [(2k+1)x]} = \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos [(n+1)x]}.$$

4.89. Să se calculeze limita produsului:

$$P = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{8}\right) \cdots \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^n}\right)$$

cînd n tinde către infinit și x tinde către zero.

4.90. Să se arate că:

$$\left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2}\right) \left(\cos \frac{a}{4} + \cos \frac{b}{4}\right) \cdots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos a - \cos b}{\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n}}.$$

4.91. Să se afle maximul și minimul expresiei:

$$E = \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

4.92. Să se afle valorile lui x care fac maximă sau minimă expresia:

$$E = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

4.93. Să se afle maximul și minimul produsului:

$$\sin^7 x \cos^5 x.$$

4.94. Să se afle maximul expresiei:

$$(\mathrm{tg}\ 3x - \mathrm{tg}^3 x)\ \mathrm{ctg}\ x.$$

4.95. Să se afle maximul și minimul expresiei $\mathrm{tg}\ 3x\ \mathrm{ctg}^3\ x$ pentru $0° < x < 90°$.

4.96. Să se afle maximul expresiei:

$$E = (5 - \sin x)(2 + \sin x).$$

4.97. Să se afle maximul produsului:

$$P = (9 + \cos^2 x)(6 + \sin^2 x).$$

4.98. Să se afle minimul expresiei:

$$E = \mathrm{tg}^2 x + 16\ \mathrm{ctg}^2 x.$$

4.99. Dîndu-se $\mathrm{tg}\ \theta = n \cdot \mathrm{tg}\ \varphi$, să se găsească maximul lui $\mathrm{tg}^2 (\theta - \varphi)$.

4.100. Să se arate că dacă A și B sînt două unghiuri pozitive și $A + B = 150°$, atunci maximul lui $\sin A + \cos B$ este $\sqrt{3}$.
G. M. B., 2584, C.I.Ț., 1958.

4.101. Să se afle maximul expresiei:

$$\sin \frac{2a - 3x}{3} \sin \frac{2x - a}{2}.$$

4.102. Într-un semicerc să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.

4.103. Să se demonstreze că dacă $0 < x < 180°$, avem:

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0.$$

4.104. Să se afle minimul expresiei

$$\mathrm{tg}\ x + \mathrm{tg}\ y, \text{ știind că } x + y = a.$$

4.105. Dacă $x + y = 45°$, să se afle maximul produsului $\cos x \cos y$ și al produsului $\sin x \sin y$.

4.106. Dacă $x + y = 180°$, să se afle valoarea maximă a produsului $\sin x \sin y$.

4.107. Dacă $x + y = 180°$, să se afle maximul produsului $\cos x \cos y$.

4.108. Dacă $x + y = 90°$, să se afle maximul sumei $\cos x + \cos y$.

4.109. Să se afle minimul expresiei:

$$\mathrm{ctg}\ x + \mathrm{ctg}\ y,$$

știind că $x + y = a$ (constant).

4.110. Dacă $x + y + z = k$, constant, să se arate că suma:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \text{ este minimă cînd } x = y = z = \frac{k}{3}.$$

4.111. Să se afle minimul expresiei:

$$E = \frac{9 + \cos 5x}{1 - \cos 5x}$$

4.112. Să se stabilească identitatea:

a) $E = \sin (4x - 10°) \cos (4x - 30°) + \sin (11x + 40°) \cos (11x + 60°) = \sin (15x - 150°) \sin (7x - 20°)$.

b) Deci $12° \leqslant x \leqslant 20°$, atunci $E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c) Să se arate fără tabele că pentru $x = 20°$, avem $E = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

G.M.B. 6449, C.I.Ț. 1965.

4.113. Dintre toate triunghiurile ce se pot circumscrie unui cerc de rază r, care este acela care are aria minimă.

4.114. Să se afle toate valorile lui x, pentru care avem simultan inegalitățile:

$$\cos x > \cos 3x,$$
$$\sin 4x > \sin 2x,$$
$$\sin 5x > \sin x.$$

G.M.B. 1900, C.I.Ț.

4.115. Să se demonstreze că:

$$2 \sin 2x \sin 2y < 1 + 8 \sin^2 x \sin^2 y$$

G.M.B., 3383, C.I.Ț. 1959.

Capitolul 5

IDENTITĂȚI ÎNTRE UNGHIURILE UNUI TRIUNGHI ȘI ÎNTRE UNGHIURILE UNUI PATRULATER CONVEX

5.1. Să se arate că dacă $a + b + c = 45°$, atunci:

$$\Sigma \operatorname{tg} a + \Sigma \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

5.2. Știind că $a+b+c = \pi$, să se transforme în produs expresia:

$$E = \cos a + \cos b - 2 \sin \frac{c}{2}.$$

5.3. Știind că $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse expresia:

$$E = \frac{\sin b + \sin c - \sin a}{\cos b + \cos a - \sin c}.$$

5.4. Să se arate că dacă între elementele unui triunghi există relația:

$$1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C},$$ triunghiul este dreptunghic.

C.D.P. V. Cristescu, p. 391.

5.5. Să se arate că dacă:

$$\sin^2 (a + b) - \sin^2 c = \frac{1 - m}{2},$$ atunci

$$\operatorname{tg} (a + b + c) \operatorname{tg} (a + b - c) = \frac{1 - m}{\cos (2a + 2b) + \cos 2c}.$$

5.6. Să se arate că în orice triunghi

$$\frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} + \frac{\sin B (\cos B - \cos C)}{\sin B - \sin C} = \cos B.$$

R.M.T. 1593. C.I.Ț., 1938.

5.7. Să se arate că pentru $0 < x < 45°$, expresiile $\sin x$, $\cos x$ și $\cos 2x$ pot fi laturile unui triunghi.
G.M.B. 1808, C.I.Ț. 1951.

5.8. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuţitunghi, să se arate că $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ pot exprima laturile unui alt triunghi.

5.9. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

5.10. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} = 1 - \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Concurs, etapa finală 1966, C.I.Ţ.

5.11. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relaţia:

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C.$$

5.12. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\Sigma \cos A = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

5.13. Să se arate că în orice triunghi există relaţia:

$$\frac{\cos (A + B + C) + \cos (A - B - C)}{\cos (A + B + C) - \cos (A - B - C)} + \operatorname{ctg}^2 A = 0.$$

5.14. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem: $a \cos(B + \alpha) + b \cos (A - \alpha) = c \cos \alpha$, unde α este un unghi oarecare; apoi să se deducă relaţia:

$$\cos 2A_1 \sin (2B_1 - \alpha) + \cos 2B_1 \sin (2A_1 + \alpha) = \cos 2C_1 \cos \alpha,$$

$$\text{unde } A_1 + B_1 + C_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Concursul G.M. 1941, C.I.Ţ.

5.15. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sin^3 A \sin(B - C) + \sin^3 B \sin (C - A) + \sin^3 C \sin (A - B) = 0.$$

5.16. Să se arate că între unghiurile unui triunghi există relaţia:

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 394.

5.17. Să se arate că între unghiurile unui triunghi există relaţia:

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C = \frac{1}{2} - 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 394.

5.18. Dacă într-un triunghi ABC avem:

$$2\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}, \text{ atunci și } 2\cos B=\cos A+\cos C.$$

5.19. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum\frac{\sin 2A\,\sin(B-C)}{\cos B\cos C}=0.$$

5.20. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\frac{\cos A-\sin A+\cos B-\cos C+1}{\cos A+\sin A-\sin B+\sin C-1}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

R.M.F., 1585 C.I.Ț. 1937.

5.21. Să se arate că în orice triunghi:

$$\Sigma\,[\sin A\sin(B-C)+(\sin^2 B-\sin^2 C)\cos^2 A]=0.$$

5.22. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\operatorname{tg}^2 A+\Sigma\operatorname{tg}A\cdot\Sigma\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\sec^2 A.$$

5.23. Să se arate că în orice triunghi avem:

$$\Sigma\cos 2A+4\cos A\cos B\cos C+1=0.$$

5.24. Să se arate că între unghiurile unui triunghi există relația:

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{cosec}A\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C.$$

5.25. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{2+\cos 2C-\sqrt{3}\sin 2C}{2-\cos 2C+\sqrt{3}\sin 2C}=\operatorname{tg}^2\frac{A+B-2C}{3}.$$

5.26. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$(\cos A+\cos B\cos C)\sin A=(\cos B+\cos C\cos A)\sin B=$$
$$=(\cos C+\cos A\cos B)\sin C=\sin A\sin B\sin C.$$

5.27. Să se arate că în orice triunghi ABC există relația

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

5.28. Să se arate că într-un triunghi oarecare

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

5.29. Fie A, B, C unghiurile unui triunghi și notăm $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=m$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$ $=n$. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}C=\frac{2(m+n)(1-mn)}{(m+n)^2-(1-mn)^2}.$$

5.30. Să se arate că în orice triunghi:

$$\operatorname{tg} nA + \frac{\sin 2nB + \sin 2nC}{\cos 2nB + \cos 2nC} = 0, \text{ unde } A \neq \frac{\pi}{2n}.$$

5.31. Să se demonstreze că dacă:

$$\cos A = \cos\alpha \sin\beta;\ \cos B = \cos\beta \sin\gamma,\ \cos C =$$
$$= \cos\gamma \sin\alpha \text{ și } A + B + C = \pi, \text{ atunci } \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

5.32. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$,

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} ac \operatorname{tg} b - \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} c = 1.$$

S.G.M. 1022 C.I.Ț. 1949.

5.33. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2B}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} = \frac{\sin 2C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

5.34. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\Sigma \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} = 1 + \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

5.35. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1.$$

5.36. Să se demonstreze că nu există triunghiuri ABC ale căror unghiuri să verifice relația:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

5.37. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, există relația:

$$\Sigma \sin A \sin B \sin (A - B) = \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A).$$

5.38. Să se arate că în orice triunghi ABC există relația:

$$\Sigma \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}} = 2.$$

5.39. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right).$$

Pitagora S. 164. C.I.Ț. 1938.

5.40. Să se arate că în orice triunghi ABC există relațiile:

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

5.41. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}} = \left(\frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}\right)^3 \cos \frac{B-A}{2}.$$

5.42. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\sin^2 \frac{A-B}{2} + \frac{\cos (A-B)}{2} + \frac{\cos C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1.$$

5.43. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sin^2 (A + 30^\circ) + \sin^2 (B + 30^\circ) + \sin^2 (C + 30^\circ) + \cos A \cos (A + 60^\circ) +$$
$$+ \cos B \cos (B + 60^\circ) + \cos C \cos (C + 60^\circ) = \frac{9}{4}.$$

G.M.B. 1953.

5.44. Să se arate că între unghiurile unui triunghi avem:

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A - \sin B + \sin C} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}}.$$

5.45. Să se arate că între unghiurile unui triunghi avem:

$$\frac{2(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}{\left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2}\right)^2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

5.46. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

5.47. Să se demonstreze că relația:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

se descompune în următoarele două relații:

$$a + b + c = (4k + 1)\pi,$$
$$\operatorname{tg} \frac{a+b-c}{4} \operatorname{tg} \frac{b+c-a}{4} \operatorname{tg} \frac{c+a-b}{4} = 1.$$

G.M.B. 7568 Gh.B. 1966.

5.48. Să se arate că între unghiurile unui triunghi ascuţitunghi există relaţia:

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

5.49. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1.$$

5.50. Să se arate că între unghiurile unui triunghi oarecare ABC există relaţia:

$$\frac{1}{4}(\Sigma \sin 2A - \Sigma \cos 2A - 1) + \sin C \left[\cos C + \sqrt{2} \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) \cos A\right] +$$

$$+ \sin^2 A = (\sqrt{3} - 1)^3 \Pi\left[\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

5.51. Să se arate că în orice triunghi:

$$1 - 8\cos A \cos B \cos C = \sin^2 (B - C) + (\cos A - 2 \cos B \cos C)^2.$$

$$1 + 8 \cos A \sin B \sin C = \sin^2 (B - C) + (\cos A + 2 \sin B \sin C)^2.$$

R.M.T. 1463, N.M. 1936.

5.52. Să se arate că în orice triunghi:

$$\Sigma\left(\frac{\Sigma (\cos A \cos B) + \cos^2 A}{\Sigma (\sin A \sin B) + \sin^2 A}\right) = 1.$$

Pitagora VII: 65. C.I.Ţ. 1936.

5.53. Să se arate că dacă $A + B + C = 225°$, atunci:

$$1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \Sigma \operatorname{tg} A + \Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B.$$

G.M.B. 3860, C.I.Ţ. 1959.

5.54. Să se arate că în orice triunghi:

$$\Sigma \operatorname{tg} A \cdot \Sigma \operatorname{ctg} A = 1 + \sec A \sec B \sec C.$$

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \Sigma \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 1 + \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \operatorname{cosec} \frac{C}{2}.$$

$$\Sigma \operatorname{tg} 2A \cdot \Sigma \operatorname{ctg} 2A = 1 - \sec 2A \sec 2B \sec 2C.$$

R.M.T. 1487 N.M.1936.

5.55. Să se arate că dacă $a + b + c = 45°$, atunci:

$$\frac{\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c}{\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c} + 1 = \frac{\sin 45°}{(\sin a + \cos a)\ (\sin b + \cos b)\ (\sin c + \cos c)} +$$

$$+ 2\,\frac{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c}{\operatorname{tg}(a + 45°)\ \operatorname{tg}(b + 45°)\ \operatorname{tg}(c + 45°)}.$$

Pitagora VI: 238, C.I.Ţ., 1938.

5.56. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$, există relația:

$$\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C + \Sigma \cos A \sin B \sin C +$$
$$+ \Sigma \sin A \cos B \cos C = \cos 45° (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

G.M.B. 2843 C.I.Ț. 1958.

5.57. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$, atunci:

$$\Sigma \operatorname{ctg} A + \Sigma \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1 + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

5.58. Știind că $A + B + C = 180°$, să se arate că:

$$E = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 2.$$

5.59. Să se arate că dacă $A + B + C = 18°$, atunci:

$$\Sigma \sin 2A + \sqrt{3} \cos 2A + 2\cos 6° = 8 (\cos 12° \cos A \cos B \cos C -$$
$$- \sin 12° \cdot \sin A \sin B \sin C).$$

P.S.117. C.I.Ț. 1939.

5.60. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$, atunci:

$$\sin (A + C) \sin (B + C) = \cos (A + 45^0) \cos (B + 45°).$$
$$\sin (A + C) \cos (B + C) = \sin (A + 45°) \cos (B + 45°).$$

S.G.M., VI. 954, C.I.Ț., 1946.

5.61. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$, atunci:

$$\sin (A + B) \sin (C + 45°) = \cos (A + B) \cos (C + 45)°$$
$$\sin (A + B) \sin (A + C) = \cos (B + 45°) \cos (C + 45°).$$

5.62. Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$\sin A \sin (A + 45) - \sin B \sin (B + 45°) =$$
$$= \sin (A - B) \sin (C - 45°).$$

R.M.F. 1951, p. 313. C.I.Ț.

5.63. Să se arate că într-un triunghi în care $A > B > C$ avem relația:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \cos^2 \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2}\left(B + \frac{A}{2}\right) + \cos \frac{C}{2} \cos \left(A + \frac{C}{2}\right).$$

175—RMF 1950, C.I.Ț.

5.64. Să se arate că în orice triunghi:

$$\Sigma \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = 1 + 2 \Pi \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}.$$

5.65. Să se arate că în orice triunghi:

$$\Sigma \cos \frac{A}{2} = \sqrt{2} \, \Pi \left(\cos \frac{A}{4} + \sin \frac{A}{4}\right).$$

5.66. Să se arate că într-un triunghi ABC:

$$\frac{(\sin B + \sin A)}{(\sin B - \sin A)} \cdot \frac{\sin (B - A)}{\sin (B + A)} = \frac{1 + \cos (B - A)}{1 + \cos (B + A)}.$$

5.67. Dacă A, B, C sînt unghiurile oricărui triunghi, atunci există relația:

$$\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2 \sin A \sin C \cos B = 0.$$

5.68. Să se arate că în orice triunghi ABC există relația:

$$\operatorname{tg}^2 A + \Sigma \operatorname{tg} A \cdot \Sigma \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sec^2 A.$$

5.69. Să se arate că în orice triunghi:

$$3 \sin A \sin B \sin C - \Sigma \sin A (\cos B \cos C + \cos A) = 0.$$

5.70. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

5.71. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4.$$

5.72. Să se arate că dacă $A + B + C = 180°$:

$$\sum \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} = 0, \quad \sum \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \sum \sin A;$$

$$\sum \sin \frac{A-B}{4}\left(\cos \frac{C}{4} - \sin \frac{C}{4}\right) = 0;$$

$$\sum \cos \frac{A-B}{4}\left(\cos \frac{C}{4} + \sin \frac{C}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{A}{2}.$$

G.M. Concurs 1947 C.I.Ț.

5.73. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right)\left(1 - \operatorname{tg} \frac{B}{4}\right)\left(1 - \operatorname{tg} \frac{C}{4}\right) = \Pi\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right).$$

5.74. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{8}\right) = \Pi \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{8}\right).$$

Rev. Pitagora VI. 47. C.I.Ț. 1936.

5.75. Să se arate că în triunghiul ABC dreptunghic în A cu unghiul B de 75° avem relația:

$$\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C = 14.$$

5.76. Să se arate că dacă $A + B + C = \frac{5\pi}{4}$,

$$-\sin\frac{\pi}{5}\sum \sin 2A + \cos\frac{\pi}{5}\sum \cos 2A +$$

$$+ 4\sin\frac{\pi}{20}\cos A\cos B\cos C + 4\cos\frac{\pi}{20}\sin A\sin B\sin C = \cos\frac{3\pi}{10}.$$

N. 9. 3046. C.I.Ț. 1937.

5.77. Să se arate că dacă $A + B + C = 45°$, atunci:

$$4\Pi\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}\right) = \sqrt{2}\sum(\sin A + \cos A).$$

P.S. 279, C.I.Ț. 1939.

5.78. Dacă într-un triunghi ABC avem relația:

$$\frac{1-\sin C}{1+\sin C} = \text{tg}^2\frac{B}{2}$$

triunghiul este dreptunghic în A.

5.79. Să se demonstreze că un triunghi este dreptunghic, dacă între unghiurile sale avem relația:

$$\cos A + \cos B = \sin C.$$

5.80. Să se arate că dacă între unghiurile unui triunghi există relația: $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C$, atunci triunghiul este dreptunghic.

5.81. Să se arate că dacă între elementele unui triunghi există relația:

$$\text{tg}\, B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)},$$

triunghiul este dreptunghic.

C.D.P. V. Cristescu, p. 391.

5.82. Să se arate că dacă între unghiurile unui triunghi există relația:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A,$$

triunghiul este dreptunghic.

C.D.P. V. Cristescu, p. 391.

5.83. Să se arate că între unghiurile unui triunghi există relația:

$$\text{ctg}\frac{A}{2} + \text{ctg}\frac{B}{2} + \text{ctg}\frac{C}{2} = \text{ctg}\frac{A}{2}\,\text{ctg}\frac{B}{2}\,\text{ctg}\frac{C}{2}.$$

5.84. Să se arate că dacă unghiurile unui triunghi verifică relația:

$$\sin A + \sin C = 2\sin B$$

avem

a) $$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3,$$

b) $$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

c) $$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}.$$

5.85. Dacă între unghiurile unui triunghi există relația:

$$\sin B+\cos B=\sin C+\cos C,$$

triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

5.86. Să se arate că un triunghi este echilateral dacă

$$1-8\cos A\cos B\cos C=0.$$

C.D.P. de V. Cristescu, p. 392.

5.87. Să se demonstreze că dacă cosec A, cosec B, cosec C formează o progresie aritmetică, avem relația:

$$\cos B=\frac{2\sin C\sin A}{\cos A+\cos C}-1 \text{ și reciproc}$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghi.

5.88. Să se arate că dacă $A+B+C=180°$,

$$\frac{\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}+\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}=-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C.$$

5.89. Ce fel de triunghi este triunghiul ABC în care există relația:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sin B-\sin C}{\sqrt{2}}.$$

5.90. Să se afle ce relație există în arcele a, b, c dacă există relația:

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=1.$$

5.91. Să se arate că:

$$\sin a+\cos a+\sin b+\cos b+2\cos\frac{a-b}{2}=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{4}\cos\frac{\pi-a-b}{4}.$$

5.92. Să se arate că în orice triunghi

$$\Sigma[\cos A(1+\sin B)(\sin B+\cos A)]+\Pi(\cos A+\sin B)=$$

$$=(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)-\cos A\cos B\cos C).$$

5.93. Să se arate că în orice triunghi

$$1 + 2\sum \sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} = 2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}.$$

5.94 Dacă într-un triunghi ABC, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 2\operatorname{tg} B$, atunci $\sin 2A + \sin 2C = 2\sin 2C$ și reciproc.

5.95. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sin^2(A - B) + \sin^2 C\cos^2(A - B) = (\sin^2 A + \sin^2 B)(\cos^2 A + \cos^2 B).$$

5.96. Dacă într-un triunghi ABC avem relația:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C = 2\operatorname{ctg} B, \text{ atunci și}$$
$$\cos 2A + \cos 2C = 2\cos 2B \text{ și reciproc.}$$

5.97. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare:

$$\frac{1 + \cos 2C}{\cos 2B + \cos 2A} + \frac{\sin 2C}{\sin 2B - \sin 2A} = \frac{2\sin 2A}{\sin(2A - 2B)}.$$

5.98. Să se arate că triunghiul ABC în care există relația

$$\operatorname{tg} B = \frac{\cos(B - C)}{\sin A - \sin(B - C)}$$

este dreptunghic în A.

5.99. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relația:

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}.$$

5.100. Se consideră funcțiile:

$$u = \operatorname{arctg}\frac{ax}{x^2 + a^2}, \quad v = \operatorname{arctg}\frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + ax + a^2}.$$

Să se arate că $\operatorname{tg}(u + v) = 1$

5.101. Să se arate că într-un triunghi oarecare, avem:

$$\cos^2(B - C) + \cos^2(C - A) + \cos^2(A - B) \geqslant 24\cos A\cos B\cos C.$$

5.102. Fie φ unghiul cuprins între mediana și bisectoarea duse din vîrful B al unui triunghi dreptunghic în A, să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}^3\frac{B}{2};$$

iar dacă triunghiul este oarecare, avem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A - C}{2}.$$

5.103. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{C + A}{2}.$$

5.104. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}.$$

5.105. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}.$$

5.106. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}.$$

5.107. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$\sin \frac{A+B}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}\right) =$$
$$= \sin \frac{B+C}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2}\right).$$

5.108. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex, există relația:

$$\sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}\right) =$$
$$= \sin \frac{B+C}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{D}{2}\right).$$

5.109. Să se arate că între unghiurile unui patrulater convex există relația:

$$2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+D}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{B+C}{2} + \sin \frac{D}{2} \sin \frac{C+D}{2} -$$
$$- \sin \frac{A}{2} \sin \left(C + \frac{B+D}{2}\right).$$

5.110. Să se arate că între unghiurile patrulaterului convex $ABCD$ există relația:

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}.$$

5.111. Să se arate că între unghiurile patrulaterului convex $ABCD$ există relația:

$$\cos A - \cos B + \cos C - \cos D = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}.$$

5.112. Să se arate că dacă $a + b + c + d = 360°$;

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \\ + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d.$$

5.113. Să se arate că dacă $A + B + C + D = 180°$, există relația

$$\cos^2 A + \cos B \cos (B + 2C) = \cos^2 C + \cos D \cos (D + 2A).$$

R.M.F. 1953, C.I.Ț. 775.

Capitolul 6

ECUAȚII TRIGONOMETRICE SIMPLE, LINIARE, OMOGENE. DISCUȚIA UNOR ECUAȚII

6.1. Să se rezolve ecuația:

$$\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

6.2. Să se rezolve ecuația:

$$3 \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x = 0.$$

6.3. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = -3.$$

6.4. Să se rezolve ecuația:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

6.5. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \frac{1}{8}.$$

G.M.B. 1799, Olimpiada 1955.

6.6. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin (a + x)}{\cos (a - x)},$$ a fiind o constantă.

6.7. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x.$$

6.8. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$$

6.9. Să se rezolve ecuația:

$$4 \sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4 \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

6.10. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{2} \cos 6x + 6 \sin 3x - 3\sqrt{2} = 0.$$

6.11. Să se găsească soluțiile ecuației:

$$(\sqrt{2}+1)\cos^2 x + (\sqrt{2}-1)\sin^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}.$$

6.12. Să se rezolve ecuația:

$$2(\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x) = 1 - \sqrt{2}.$$

6.13. Să se rezolve ecuația:

$$(2+\sqrt{3})\sin 3x + \cos 3x = 2 + \sqrt{3}.$$

6.14. Să se rezolve ecuația:

$$(a^2 - b^2)\sin 2x - 2ab\sin^3 x = 0.$$

6.15. Să se rezolve ecuația:

$$4\sin^3 x = \sin 3x.$$

6.16. Să se rezolve ecuația:

$$|\sin x| - |\cos x| = a, \ a \text{ fiind o constantă}$$

și să se arate valorile lui x cuprinse în intervalul $[0, 360°]$.

6.17. Să se rezolve ecuația:

$$1 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 4x = 0.$$

6.18. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2\frac{x-a}{2} + \sin^2\frac{x+a}{2} = 1.$$

6.19. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x \operatorname{ctg} x - \cos x \operatorname{tg} x = 0.$$

6.20. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$$

6.21. Să se rezolve ecuația:

$$3\cos^2 x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0.$$

6.22. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg}^3 x + 2\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 1 = 0.$$

6.23. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

6.24. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg}^2 x - 4\cos^2 x = 0$$

6.25. Să se rezolve ecuația:

$$4 \cos \frac{x}{2} = 2 \cos x + 3.$$

6.26. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

6.27. Să se rezolve ecuația:

$$\cos 4x = \cos^2 x.$$

6.28. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}.$$

6.29. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

6.30. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} (x + a) = 0.$$

6.31. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = m \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin^2 x}.$$

Să se studieze cazurile $m = \pm 1$.

6.32. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$(2m - 1) \cos 2x - 3\cos x + m - 5 = 0.$$

6.33. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$m \cos 2x + 2 (m^2 + 3) \sin x - 7m = 0.$$

6.34. Să se rezolve ecuația:

$$2\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

6.35. Să se rezolve ecuația:

$$\sin (x + a) = \cos (3x + b).$$

6.36. Să se rezolve ecuația:

$$4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$$

6.37. Să se rezolve ecuația:

$$\sin (x^2 + 1) = \cos 2x.$$

6.38. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg}^2 x.$$

6.39. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}(4x - 15°) = \operatorname{ctg}(8x + 45°).$$

6.40. Să se găsească valorile lui x cuprinse între 0 și $\frac{\pi}{2}$ care satisfac ecuația:

$$\sin 2x = \cos(x + a).$$

6.41. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg}(x + a) - \operatorname{ctg}(x - a) = -\operatorname{ctg} a$$

și să se discute.

6.42. Să se rezolve ecuația:

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{10} = 0.$$

6.43. Să se rezolve ecuația:

$$\sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{5} = 0.$$

6.44. Să se rezolve ecuația:

$$1 - \sin x = -\cos x.$$

6.45. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 4\cos 2x.$$

6.46. $2\sin x + \cos x = 2.$

6.47. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}.$$

6.48. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + 2\cos x)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\left(3 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right).$$

6.49. Să se rezolve ecuația:

$$2\sin x + 3\cos x = 3.$$

6.50. Să se rezolve ecuația:

$$2\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - 3 = 0.$$

6.51. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \sec^2 x - 5 = 0.$$

6.52. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

6.53. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1.$$

6.54. Să se rezolve ecuaţia:

$$1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x.$$

6.55. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1.$$

6.56. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4.$$

6.57. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sec x - \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

6.58. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x = \sin^2 x.$$

6.59. Să se rezolve ecuaţia:

$$4 \sin x + \cos x = \sec x.$$

6.60. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1.$$

6.61. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \cos x - 3 \sin x \cos x = \frac{1}{2}.$$

6.62. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

6.63. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

6.64. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 5x - \sin 5x = \cos x - \sin x.$$

6.65. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

6.66. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x \cdot \cos 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

6.67. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

6.68. Să se rezolve ecuaţia:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

6.69. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x.$$

6.70. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x = \sin x + \cos x.$$

6.71. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

6.72. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}(\sin^4 x - \cos^4 x).$$

6.73. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 x (1 + \operatorname{tg} x) - \cos^2 x (1 + \operatorname{ctg} x) = \cos 2x.$$

6.74. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$$

6.75. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

6.76. Să se rezolve ecuaţia:

$$1 + 2\cos x = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}\left(3 - 4\sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

6.77. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x + 1 = 0.$$

6.78. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \sin 3x + (1 + 2\sin^2 2x)\sin 4x - 2\cos^2 2x \sin 4x = 0.$$

6.79. Să se rezolve ecuaţia:

$$4 \sin^3 x - 3 \sin x + 1 = 0.$$

6.80. Să se rezolve ecuaţia:

$$24 \sin^3 x - 26 \sin^2 x + 9 \sin x - 1 = 0,$$

ştiind că $\sin x_1 + \sin x_2 = \frac{5}{6}$.

6.81. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = 2.$$

6.82. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

6.83. Să se rezolve ecuaţia:

$$8 \sin^3 x - 8 \sin x + 3 = 0.$$

6.84. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x \cos 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

6.85. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sin x + \sqrt{\sin x})^2 - (\sin x + \sqrt{\sin x}) = -\frac{3}{16}.$$

6.86. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$$

6.87. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2x = m \operatorname{tg} x$$

şi să se discute rezultatul.

6.88. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$\sin x + \sin 3x = m \sin 2x$, m fiind un parametru.

6.89. Să se arate că ecuaţia $x^2 - 4x + 1 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 4 \cos^2 15°$ şi $x_2 = \sin^2 15$.

6.90. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sin x + m \sin^2 2x + \sin 3x = 0.$$

6.91. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_a (\sin x + \cos x) = b$$

şi să se discute rezultatul.

6.92. Să se rezolve ecuaţia:

$$(2a^2 + a - 1) \cos 2x - 2(2a + 1) \cos x + 2a^2 + a + 1 = 0$$

şi să se determine valorile lui a, astfel ca să existe o singură valoare a lui $\cos x$ care să satisfacă ecuaţia.

6.93. Să se rezolve ecuaţia:

$$3 \sin x \cos x = 1.$$

6.94. Să se rezolve ecuaţia:

$$2 \sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x.$$

6.95. Să se rezolve ecuaţia:

$$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2.$$

6.96. Să se rezolve ecuaţia:

$$2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

6.97. Să se rezolve ecuaţia:

$$4 \cos^2 x + 4\sqrt{3} \sin x - 7 = 0.$$

6.98. Să se arate că $2 \cos 36°$ şi $-2 \sin 18°$ sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

6.99. Să se rezolve ecuaţia:

$$2 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 1.$$

6.100. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1.$$

6.101. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 2x + \cos^2 x = \frac{3}{2}.$$

6.102. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \sin 2x) = \sin^2 x.$$

G.M.B. 1201, Gh. Bercea.

6.103. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}(45° - x) + \operatorname{tg} x = 2.$$

6.104. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}.$$

6.105. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4.$$

6.106. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\sec^2 x + 2 \operatorname{tg} x} - \sqrt{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x} = 1$$

şi să se verifice soluţiile.
S.G.M. VIII. 219. C.I.Ţ. 1937.

6.107. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}} + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}.$$

6.108. Să se rezolve ecuația:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

6.109. Să se rezolve ecuația:

$$6 \sin^3 x - 5 \sin x + 2 \cos^3 x = 0.$$

R.M.F. 635 — 1953.

6.110. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} x.$$

6.111. Să se rezolve ecuația:

$$m \cos 2x + 2 (m^2 + 3) \sin x - 7m = 0.$$

6.112. Să se rezolve ecuația:

$\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = m$, unde m este un parametru real.

G.M.B. 5707, 1963.

6.113. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg}^2 2x = \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 3x.$$

6.114. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

6.115. Să se rezolve ecuația:

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = m \operatorname{tg} x$, m fiind un parametru.

6.116. Să se rezolve ecuația:

$\operatorname{tg} [(m + 3) x] \operatorname{tg} mx = \operatorname{tg} [(m + 1)x] \cdot \operatorname{tg} [(m + 2) x]$, m fiind o constantă.

Discuţie:

6.117. Să se rezolve ecuația:

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

6.118. Să se rezolve ecuația:

$$2\cos 2x = (1 + \sqrt{3})(\cos x - \sin x).$$

6.119. Să se rezolve ecuația:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin 2x.$$

6.120. Să se exprime tg x dacă:

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

6.121. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

6.122. Să se rezolve ecuația:

$$32 \sin^6 x + \cos 6x - 1 = 0.$$

6.123. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0, 180°)$ care verifică ecuația:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x = \frac{15}{4}.$$

6.124. Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0.$$

6.125. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

6.126. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

6.127. Să se rezolve ecuația:

$$64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 169 \cos^6 2x.$$

6.128. Să se rezolve ecuația:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) = \sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

6.129. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 3x - 4 \sin 2x = 0.$$

6.130. Să se arate că:

$$4\cos^4 x + 4\sin^4 x = 3 + \cos 4x$$

și apoi să se rezolve ecuația

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 2\cos(2x + 30°)\cos(2x - 30°),$$

necunoscută fiind cerută sub formă trigonometrică.

6.131. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

6.132. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{2} + 16^{\sin x} = \frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

6.133. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sin x + \cos x)^{2n+1} + (\sin x - \cos x)^{2n+1} =$$

$$= 2^n \sqrt{2}\left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

G.M.B. 6307, Elena Flondor, 1965.

6.134. Să se rezolve ecuaţia:

$$2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} \cos \pi x\right) = 1.$$

6.135. Să se rezolve ecuaţia:

$$2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi + 2x}{4} = -1.$$

La Facultatea de ştiinţe economice, Craiova 1966.

6.136. Să se rezolve ecuaţia:

$$32 \cos^2 \frac{x}{3} - \cos 2x = 1.$$

6.137. Să se rezolve ecuaţia:

$$3 \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

6.138. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^5 x + \sec x = \cos^5 x + \operatorname{cosec} x.$$

6.139. Să se afle valorile lui x pentru care:

$$|1 - \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x| + |1 - \operatorname{tg}^2 2x - 2 \operatorname{tg} 2x| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Să se menţioneze valorile lui x în intervalul $(0, 360°)$.

6.140. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} x = 1.$$

6.141. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sin 15x \cdot \cos (20x + 60°) + 1}{\sin 15x - \cos (20x + 60°) - 2} = 0.$$

6.142. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{(4 - \sin^2 2x)^2} = \frac{7}{169}.$$

6.143. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4}$$

şi apoi să se calculeze cos 36°.

6.144. Să se rezolve ecuaţia:

$$16 \sin^6 x + 6 \cos 2x - 3 \cos 4x = 4{,}75.$$

6.145. Se dă ecuaţia:

$$x^3 - (2 + m)\, x^2 + (3m - 4)\, x + 2m - 7 = 0,$$

ale cărei rădăcini x_1, x_2, x_3 sînt respectiv tg a, tg b, tg c.

Să se afle tg $(a + b + c)$. În cazul $m = 3$ să se afle unghiurile a, b, c.

6.146. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}\,(\cos^4 x - \sin^4 x).$$

Capitolul 7

SISTEME DE ECUAŢII TRIGONOMETRICE CU DOUĂ ŞI TREI NECUNOSCUTE. DISCUŢIA UNOR SISTEME DE ECUAŢII

7.1. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + y = \frac{\pi}{2},$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}.$$

7.2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\sin x + \sin y = 0,$$

$$\cos x + \cos y = 2.$$

7.3. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\sin x - \sin y = \sin 50°,$$

$$\cos x + \cos y = 1 + \cos 50°.$$

7.4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{4},$$

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4}.$$

7.5. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{1}{3},$$

$$\cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

7.6. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1,$$

$$\operatorname{tg} (x + y) = \frac{4}{3}.$$

7.7. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}.$$

7.8. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x + y = 120°,$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

7.9. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos 2x + \cos 2y = 0,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}.$$

7.10. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x + y = \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin 2x = 2\cos^2 y.$$

7.11. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sin(x + y) = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2x + \sin 2y = \frac{1}{2}.$$

7.12. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sin x = \cos 2y,$$

$$\sin 2x = \cos y.$$

7.13. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos x + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 0.$$

7.14. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2},$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 0.$$

7.15. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos 2y - \cos 2x = b,$$
$$\sin x + \sin y = a.$$

7.16. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos(x + y) + \sqrt{3}\sin(x + y) = 1,$$
$$\cos 3x - \cos x = \sin 2x.$$

7.17. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x - y = 30°,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7.18. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1,$$
$$\sin 2x + \sin 2y = 1.$$

7.19. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$\cos x + \cos y = m \cos \alpha,$$
$$\sin x + \sin y = m \sin \alpha.$$

7.20. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x + y = b.$$

7.21. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$\sin x - a \sin y = 0,$$
$$\cos x - b \cos y = 0.$$

7.22. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\sin x \sin y = a, \qquad (1)$$
$$\cos x \cos y = b.$$

7.23. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații:

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = c,$$
$$m \operatorname{ctg} x + n \operatorname{ctg} y = p.$$

7.24. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

7.25. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a,$$
$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b.$$

7.26. Să se rezolve sistemul:

$$2 \sin x - \cos y = 0; \qquad x + y = 45°.$$

7.27. Să se rezolve sistemul:

$$\sin x + \sin y = 1,$$
$$\cos x + \cos y = \frac{3}{2}.$$

7.28. Să se rezolve sistemul:

$$\sin 2x + \sin 2y = \sqrt{3},$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{4}{3},$$

știind că x și y sînt în primul cadran.

7.29. Să se rezolve sistemul:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3},$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

7.30. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \sin 45° = \frac{\sin 2x}{\sin 2y} \sin 60° = 1.$$

7.31. Să se rezolve sistemul:

$$a \sin x + b \cos y = m,$$
$$x + y = n\pi.$$

7.32. Să se rezolve sistemul:

$$x - y = a,$$
$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{b}{c}$$

și să se stabilească condiția de posibilitate.

7.33. Să se rezolve sistemul:

$$\sin x + \sin y = a$$
$$\cos x + \cos y = b, \text{ unde } a^2 + b^2 \leqslant 4,$$

calculîndu-se mai întîi $\sin x$ și $\sin y$, în funcție de a și b.

7.34. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\sin^3 x + \sin^3 y}{\cos^3 x + \cos^3 y} = \sqrt{3}; \quad 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x-y}{2} = 1.$$

R.M.T. 1495, 1937.

7.35. Să se rezolve sistemul:

$$\sin^3 x - \operatorname{tg}^3 y = 3 \sin x(\sin x - 1) - 3\operatorname{tg} y(\operatorname{tg} y - 1),$$
$$\sin x \operatorname{tg} y - (\sin y + \operatorname{tg} y) + 1 = 0.$$

7.36. Să se afle valorile lui x și y din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, care verifică simultan ecuațiile:

$$\cos (4x - 3y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \ \operatorname{ctg} (x + 2y) = 1.$$

7.37. Să se rezolve sistemul:

$$\sin^{3 \operatorname{ctg} y} x + \operatorname{tg}^{3 \operatorname{cosec} x} y = \frac{9}{8},$$
$$\sin^{2 \operatorname{ctg} y} x + \sin^{2 \operatorname{cosec} x} y = \frac{3}{4}.$$

7.38. Să se rezolve sistemul:

$$\cos (7x - a) = \sqrt{2} \cos (5x - a) - \cos (3x - a),$$
$$\cos (6x - a) = y \cos (5x - a) - \cos (4x - a).$$

7.39. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a,$$
$$x \sin 2a + y \sin 4a = \sin 6a.$$

7.40. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\sin\ 2x + \cos\ 2x}{\cos\ y} + \frac{\cos\ 2y - 1}{\sin\ 2y} = 1,$$
$$2 \sin\ (2x + 2y) - 2 \sin\ 2x = 1.$$

7.41. Să se rezolve sistemul:

$$\sin (x - a) + \cos (y - a) = 0,$$
$$\sin (x + a) + \cos (y + a) = \sin 2a.$$

7.42. Să se rezolve sistemul:

$$\operatorname{arctg}(x + 3y) + \operatorname{arctg}(x - a) = \arcsin \frac{5}{\sqrt{61}},$$
$$2x + y = 7.$$

7.43. Se dă sistemul de ecuații

$$(a - b) \sin (x + y) - (a + b) \sin(x - y) = 0$$
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = ab.$$

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine arcele x și y pentru cazul cînd $a = -1$ și $b = \sqrt{3}$.
La admitere în Institutul politehnic, Iași 1967.

7.44. Să se rezolve sistemul:

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x,$$

$$\cos (x + y) + \sqrt{3} \sin (x + y) = 1.$$

7.45. Să se rezolve sistemul:

$$2 \sin x = \sin y,$$

$$2 \cos x + \cos y = \sqrt{3}.$$

7.46. Să se rezolve sistemul:

$$\sin x + \sin y = a,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = b.$$

7.47. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sin^2 x \cos^2 y = \sin^2 y \cos^2 z = \sin^2 z \cos^2 x = a.$$

G.M.B. 5055, C.I.Ț. 1944.

7.48. Se dă sistemul de ecuații:

$$\frac{x}{\sin z} = \frac{a}{\sin 2z} = \frac{y}{\sin 3z},$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{a + y} = \frac{y}{(x + y)\cos z + a \cos 2z}.$$

Să se arate că este compatibil și să se rezolve.

G.M.B. 1956. C.I.Ț.

7.49. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x + y + z = 3A,$$

$$x \cos \theta_1 + y \cos \theta_2 + z \cos \theta_3 = \frac{3}{2} B,$$

$$x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2 + z \sin \theta_3 = \frac{3}{2} C,$$

știind că $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ și $\theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{3}$.

G.M. 1941, p. 217.

7.50. Să se discute sistemul:

$$x \cos^2 \frac{\beta}{2} + y \cos^2 \frac{\alpha}{2} = x \cos^2 \frac{\gamma}{2} + z \cos^2 \frac{\alpha}{2} = y \cos^2 \frac{\gamma}{2} + z \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{x+y+z}{2},$$

unde $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ (k întreg).

Să se rezolve acest sistem.

Concursul G.M. 1941.

7.51. Să se rezolve sistemul:

$$x + y + z = 180^\circ,$$
$$\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} y = 3\operatorname{tg} z.$$

7.52. Să se rezolve sistemul:

$$\sin(x - y) = 2\cos x \cos y,$$
$$\sin(y - z) = \cos y \cos z,$$
$$\sin(z + x) = 4\cos x \cos z.$$

7.53. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + y = 11,$$
$$xy = 60\cos z,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \cos z = 31.$$

7.54. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\sin^2 x - \sin^2 (y - z) = a,$$
$$\sin^2 y - \sin^2 (z - x) = b,$$
$$\sin^2 z - \sin^2 (x - y) = c.$$

Capitolul 8

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ. APLICAȚII LA FORMULA LUI MOIVRE. SUME ȘI PRODUSE TRIGONOMETRICE DEDUSE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE. ECUAȚII TRIGONOMETRICE ÎN CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

8.1. Să se arate că:

$$\frac{\cos a + i \sin a}{\sin a + i \cos a} + \frac{\cos a - i\sin a}{\sin a - i\cos a} = 2\sin 2a, \text{ unde } i^2 = -1.$$

N. 6.2950 C.I.Ț., 1937.

8.2. Din considerarea produsului:

$$(\sin 3x + i \sin x)(\cos 3x + i \cos x)$$

să se deducă identitatea:

$$(\sin^2 3x + \sin^2 x)\ (\cos^2 3x + \cos^2 x) = \sin^2 2x\ (4\cos^2 2x + \cos^2 4x).$$

8.3. Să se simplifice:

$$\frac{\cos x + i\sin x}{\cos y - i\sin y}.$$

8.4. Să se arate că orice număr complex de modul 1 se poate pune sub forma:

$$\frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i},$$

unde λ este un număr real.

8.5. Să se arate că dacă:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos \alpha,$$

atunci avem:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

8.6. Să se demonstreze că:

$$(1 + i\sqrt{3})\,(1 + i)\,(\cos \varphi + i\sin \varphi) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right)\right].$$

8.7. Să se găsească pentru $a = 15°$ valoarea expresiei:

$$\frac{(\cos a + i\sin a)(\cos 2a + i\sin 2a)}{\cos 3a - i\sin 3a}.$$

8.8. Să se calculeze:

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos x + i\sin x)}{2(1 - i)(\cos x - i\sin x)}.$$

8.9. Să se calculeze:

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}.$$

8.10. Să se calculeze:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}.$$

8.11. Să se calculeze:

$$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

8.12. Să se arate că:

$1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \ldots = 2^n \cos\frac{n\pi}{3}$, plecînd de la dezvoltarea expresiei:

$$(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n, \text{ unde } n \in N.$$

8.13. Să se demonstreze că:

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right),$$

unde n este un număr întreg.

8.14. Să se simplifice $(1 + x)^n$, dacă:

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

8.15. Punînd $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se determine $x_1^n + x_2^n$, unde n este un număr întreg.

8.16. Să se calculeze:

$$(1 + \cos x + i\sin x)^n.$$

8.17. Să se arate că:

$$C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \ldots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

8.18. Să se calculeze:

$$\sqrt[5]{3+4i}.$$

8.19. Să se calculeze:

$$\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}.$$

8.20. Să se calculeze:

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

8.21. Se dă expresia $\dfrac{bc}{(a+b)(a+b)}$. Se înlocuiesc $a = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$; $b = \cos 2\beta + i\sin 2\beta$;
$c = \cos 2\gamma + i\sin 2\gamma$. Dacă rezultatul ar fi de forma $A + Bi$, să se găsească A și B.

8.22. Să se demonstreze egalitatea:

$$[\cos x + \cos y + i(\sin x + \sin y)]^n + [\cos x + \cos y - i(\sin x + \sin y)]^n = 2^{n+1} \left(\cos \frac{x-y}{2}\right)^n \cos \frac{n(x+y)}{2}.$$

8.23. Să se arate că:

$$\frac{\cos a - i\sin a}{\sin a - i\cos a} = \sin 2a + i\cos 2a.$$

N. 6.2953, C.I.Ț. 1937.

8.24. Să se exprime $\cos^5 a$ și $\sin^5 a$ în funcție de cosinusurile respectiv sinusurile multiple unghiului a.

8.25. Să se arate că:

$$(\cos a + i\sin a)(\sin a + i\cos a) + (\cos a - i\sin a)(\sin a - i\cos a) \equiv 0$$

și să se interpreteze geometric.

N.8.2993, C.I.Ț. 1937.

8.26. Se dă numărul $N = \dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}+1)}$.

Să se calculeze N^{121}.

8.27. Să se calculeze modulul și argumentul lui:

$$z = \frac{1 + i\sqrt{2}}{1 + 2i}.$$

8.28. Se dă numărul $N = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$. Să se scrie sub forma trigonometrică N^{1967} și să se calculeze.

8.29. Să se arate că:

$$\frac{(\sin a + i\cos a)(\cos a - i\sin a)}{(\sin a - i\cos a)(\cos a + i\sin a)} = \frac{1 + i\operatorname{cotg} 2a}{1 - i\operatorname{cotg} 2a}.$$

N. 6.2952. C.I.Ț. 1937.

8.30. Știind că $\sqrt[n]{a + bi} = x + yi$; $\sqrt[n+1]{a' + b'i} = y + xi$,

a, b, x, y fiind reale, iar n întreg pozitiv și să se demonstreze relația:

$$x^2 + y^2 = \frac{(a')^2 + (b')^2}{a^2 + b^2}.$$

8.31. Să se arate că:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} a + i} + \frac{1}{\operatorname{tg} a - i} = \frac{1}{\operatorname{ctg} a + i} + \frac{1}{\operatorname{ctg} a - i} = \sin 2a \cdot$$

$$\frac{1}{(\operatorname{ctg} a - i)^2} + \frac{1}{(\operatorname{ctg} a + i)^2} = \frac{1}{2}\sin^2 2a - 2\sin^4 a \cdot$$

8.32. Să se exprime $\sin(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$ și cosinusul în funcție de sinusurile și cosinusurile arcelor simple.

8.33. Să se arate că:

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2i\sec x} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2i\sec x} + 2\sec x = 0.$$

8.34. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\cos^2 x + 2i\sin x} + \sqrt{\cos^2 x - 2i\sin x} = 2.$$

8.35. Să se găsească rădăcinile comune ecuațiilor:

$$x^{30} - 1 = 0 \text{ și } x^{20} - 1 = 0.$$

8.36. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt[n]{i} \pm i\sqrt[n]{-i}}{1 \pm i} = \cos\frac{\pi}{2n} \pm \sin\frac{\pi}{2n},$$

unde $i^2 = -1$.
S.G.M., E.G. 930, C.I.Ț. 1949.

8.37. Să se arate că:

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i(\sqrt{2})^n};$$

$$\cos\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2(\sqrt{2})^n}.$$

8.38. Să se rezolve ecuația:

$$(a - 2x - 2\sqrt{x^2 - ax - b^2})^n - (a + 2bi)^n = 0, \text{ unde } i^2 = -1.$$

R.M.T. 892, 1930.

8.39. Să se rezolve ecuația:

$$(x + i\sqrt{x^2 - a^2})^n = (x - i\sqrt{x^2 - a^2})^n, \text{ unde } i^2 = -1.$$

R.M.T. 884, C.C. 1930.

8.40. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

8.41. Să se afle sumele:

a) $T_1 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$

b) $T_2 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx.$

8.42. Să se afle sumele:

$$S = \cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \dots + a^{n-1}\cos nx.$$

$$T = \sin x + a\sin 2x + a^2\sin 3x + \dots + a^{n-1}\sin nx.$$

8.43. Să se calculeze:

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \dots + a^n\cos n\varphi.$$

8.44. Să se arate că:

a) $\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$

b) $\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\cdot\cos\frac{3\pi}{n}\dots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = 0$, dacă n este par

și este egal cu $\frac{(-1)^m}{2^{2m}}$ dacă $n = 2m + 1$.

8.45. Să se calculeze suma:

$$S_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

8.46. Să se arate că:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+\ldots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}=\operatorname{ctg} x-\frac{\cos (n+1)x}{\sin x \cos^n x}.$$

8.47. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)a=\frac{\sin 2na}{\sin a}.$$

8.48. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \cos 2ka=\frac{\sin (2n+1)a}{2\sin a}.$$

8.49. Să se arate că:

$$2 \cos (n \arccos x)=(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n.$$

8.50. Să se arate că dacă $x+\frac{1}{x}=2\cos a$, atunci:

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

8.51. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sum_{k=0}^{p} \sin (n+k)x=\sum_{k=0}^{p} \cos (n+k)x.$$

8.52. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei:

$$\sin z+\cos z=i$$

în corpul numerelor complexe sînt:

$$z=\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)-i\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}};$$

$$z=\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-i\log\frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

unde $i^2=-1$, k număr întreg.

8.53. Să se arate că dacă n este număr natural impar, atunci:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left[C_n^k \cos\frac{(n-2k)\pi}{n}\right]=2^{n-1}\cos^n\frac{2\pi}{n}.$$

8.54. Să se arate că

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(3k+1)\pi}{6n} \sin \frac{(2k+2)\pi}{6n} = \frac{\sqrt{3}}{4^n}.$$

R.M.T. 847. V.A., 1937.

8.55. Să se arate că între unghiurile unui patrulater $ABCD$ avem:

$$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C)(\cos D + i\sin D) = 1,$$

iar între unghiurile oricărui triunghi ABC, avem:

$$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C) + 1 = 0.$$

8.56. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 = 0, \ a > 0.$$

Folosind rezolvarea ecuațiilor binome cu ajutorul numerelor complexe, forma trigonometrică, să se deducă valorile:

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \ \cos \frac{4\pi}{5}, \ \cos \frac{6\pi}{5}, \ \cos \frac{8\pi}{5}.$$

G.M.B. 4438, 1960.

8.57. Să se arate că:

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n + 1}{(2+\sqrt{3})^n - 1} + \frac{(2-\sqrt{3})^n + 1}{(2-\sqrt{3})^n - 1} = 0.$$

8.58. Să se afle suma:

$$T = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx.$$

8.59. Să se afle suma:

$$T = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx.$$

8.60. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \sin x + \sin (x + r) + \sin (x + 2r) + \ldots + \sin [x + (n-1)r].$$

$$S_2 = \cos x + \cos (x + r) + \cos (x + 2r) + \ldots + \cos [x + (n-1)r].$$

8.61. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \sin^2 x + \sin^2 (x + r) + \sin^2 (x + 2r) + \ldots + \sin^2 [x + (n-1)r].$$

$$S_2 = \cos^2 x + \cos^2 (x + r) + \cos^2 (x + 2r) + \ldots + \cos^2 [x + (n-1)r].$$

8.62. Să se afle suma:

$$T_1 = \sin^3 x + \sin^3 (x + r) + \ldots + \sin^3 [x + (n-1)r] \text{ și}$$

$$T_2 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx.$$

8.63. Să se calculeze sumele:

$$T = \cos^3 x + \cos^3 2x + \ldots + \cos^3 nx.$$

8.64. Să se arate că:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

8.65. Să se arate că suma distanţelor unui punct luat în interiorul unui poligon regulat la cele n laturi este egală cu de n ori apotema poligonului.

8.66. Să se arate că suma pătratelor distanţelor unui punct oarecare de pe cercul circumscris unui triunghi echilateral la cele trei vîrfuri este egală cu $6R^2$.

8.67. Dacă se împarte un cerc de rază R în n părţi egale prin punctele de diviziune $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$, atunci produsul distanţelor unuia dintre aceste puncte la toate celelalte este egal cu nR^{n-1}.

8.68. Dacă punem $x + \frac{1}{x} = 2\cos A$; $y + \frac{1}{y} = 2\cos B$, A şi B fiind unghiurile unui triunghi, atunci dacă a, b, c sînt laturile triunghiului, să se arate că avem:

$$c = bx + \frac{a}{y}.$$

8.69. Să se rezolve ecuaţia binomă:

$$z^4 + 4 = 0.$$

8.70. Să se rezolve ecuaţia:

$$(1 + i\sqrt{3})\, z^6 - 1 + i = 0.$$

8.71. Să se găsească expresia generală a arcului x, care satisface ecuaţia:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos 2x + i\sin 2x) \ldots (\cos nx + i\sin nx) = 1.$$

8.72. Să se arate că:

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^{24} + 2^{24} = 0.$$

G.M.B. 7612, C.I.Ţ. 1966.

8.73. Să se arate că:

$$2\sin\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}};\quad 2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$$

fiecare formulă avînd $(n-1)$ radicali.

8.74. Să se arate că:

$$(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right);\ i^2 = -1.$$

8.75. Să se arate că:

$$(\sqrt{3}-1)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i\sin \frac{n\pi}{6}\right), \text{ unde } i^2 = -1.$$

8.76. Să se arate că pentru orice $n > 2$ avem:

$$\cos nx = 2 \cos x \cos (n-1) x - \cos (n-2)x.$$

8.77. Să se arate că:

$$\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}.$$

Capitolul 9.

DEMONSTRAŢII GEOMETRICE ALE UNOR RELAŢII TRIGONOMETRICE. DEMONSTRAŢII TRIGONOMETRICE ALE UNOR RELAŢII GEOMETRICE. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR. APLICAŢII ÎN FIZICĂ. RELAŢII ÎNTRE LATURILE ŞI UNGHIURILE UNUI PATRULATER OARECARE. INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI

9.1. Să se demonstreze geometric că în orice triunghi avem relaţia:

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=a\cos\frac{B+C}{2}.$$

9.2. Să se demonstreze geometric că laturile unui triunghi sînt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse.

9.3. Să se demonstreze geometric că în orice triunghi avem relaţia

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)=a\sin\frac{B-C}{2}.$$

9.4. Să se demonstreze geometric că în orice triunghi avem relaţia:

$$(b-c)\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

9.5. Să se demonstreze că în orice triunghi avem relaţia:

$$OI^2=R(R-2r),$$

unde O este centrul cercului circumscris, I este centrul cercului înscris, iar R şi r razele respective ale acestor două cercuri.

9.6. Două segmente AC = 231,54 cm şi BC = 198,92 cm fac un unghi ACB = 118°15′29″, iar dintr-un punct P situat în planul lor s-au măsurat unghiurile APC = 57°30′28″, BPC = 61°29′17″. Să se calculeze unghiurile PAC şi PBC.

9.7. Să se calculeze distanţa dintre două puncte inaccesibile A şi B, ştiind că de la extremitatea unei baze CD=304,10 cm s-au măsurat unghiurile ADC=28°30′, BDC=97°45′, BCD=60°; ACD=137°.

9.8. Un paratrăsnet AB de 8,264 m lungime este aşezat pe o clădire a cărei înălţime este AC. Dintr-un punct P aşezat la o depărtare de 82,656 m, de piciorul clădirii şi la o înălţime de 1,621 m. deasupra terenului, paratrăsnetul se vede sub un unghi de 4°27′54″. Să se calculeze înălţimea clădirii.

9.9. O statuie de 2,20 m înălţime este aşezată pe un piedestal de 3,50 m înălţime. Să se calculeze unghiul sub care se poate vedea statuia de către un observator al cărui ochi se află cu 1,64 m deasupra terenului.

9.10. O persoană care se află pe malul unui rîu vede un arbore de pe malul direct opus, sub un unghi de 60°, iar cînd se retrage cu 20 m de la mal vede arborele sub un unghi de 30°. Să se calculeze înălţimea arborelui şi lăţimea rîului.
C.D.P. de V. Cristescu, p. 410.

9.11. Dintr-un punct A situat la sudul unui turn înălţimea turnului se vede sub un unghi de 30°, iar din punctul B aflat la apus de A şi la distanţa $AB=a$ de el, înălţimea turnului se vede sub un unghi de 18°. Să se calculeze înălţimea turnului.
C.D.P. de V. Cristescu, p. 410.

9.12. Un turn observat de pe mare dintr-un vas se află în direcţia Est — — Nord-Est., iar după ce vasul mai face 4 km către Est, turnul se află în direcţia Nord — Nord-Est. Se cere distanţa de la turn la vas în prima şi a doua poziţie.
C.D.P. de V. Cristescu, p. 411.

9.13. Dintr-un punct C, un segment de dreaptă AB se vede sub un unghi C. Să se determine distanţa de la punctul C la dreapta AB, ştiind că $AB=c=323$ m; $C=83°38'2''$; $a-b=85$ m; şi unde $BC=a$; $AC=b$.

9.14. Un turn înalt de 30 m se vede din punctul A sub un unghi θ. Apropiindu-ne cu 50 m de turn, se vede sub un unghi dublu. Care este distanţa de la A pînă la piciorul turnului?

9.15. Să se determine raza unui turn circular inaccesibil măsurîndu-se o bază $AB=d$, unghiurile $BAM=\alpha$, $BAP=\alpha'$ $ABM'=\beta$, $ABP=\beta'$, AM şi BM' fiind razele vizuale tangente turnului.

9.16. Un alpinist face ascensiunea unui masiv. Drumul a fost parcurs în două etape egale ca lungime. Ştiind că prima etapă se face sub unghiul α, iar a doua etapă sub unghiul 2α, se cere unghiul α, cunoscînd înălţimea h a masivului şi baza lui b.

9.17. Dintr-un balon B staţionar la 1000 m se vede vîrful V al unui deal sub un unghi de depresiune de 45° (unghiul format de direcţia BV cu orizontul lui V).

Balonul coboară apoi, vertical, 300 m, pînă în C, de unde vîrful dealului se vede sub unghiul de depresiune de 22°30′. Să se calculeze înălţimea dealului.

9.18. Pe un teren orizontal se află un turn AT şi un stîlp BS, situat la depărtarea a unul de celălalt. Ştiind că de la piciorul stîlpului turnul se vede sub unghiul $ABT=2\alpha$, de la piciorul turnului stîlpul se vede sub unghiul $BAS=\alpha$, iar de la mijlocul M, al depărtării $AB=a$ unghiurile sub care se văd cele două obiective sînt complimentare, se cere să se calculeze înălţimea turnului şi stîlpului.

9.19. Pe un coş de fabrică AP se află montat un paratrăsnet PV de lungime dată 1. Un observator BC de înălţime h şi aşezat la distanţa d de piciorul coşului vede paratrăsnetul sub un unghi $PCV=\alpha$

Să se determine înălţimea vîrfului paratrăsnetului faţă de sol.

9.20. Pentru a măsura distanța XY a două puncte inaccesibile s-a măsurat o bază oarecare $AB=a$, apoi unghiurile $BAX=\alpha$, $BAY=\alpha'$ $XAY=\alpha''$, $ABX=\beta$, $ABY=\beta'$, $XBY=\beta''$. Ce relație există între unghiurile

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \beta',\ \beta''?$$

C.D.P. de V. Cristescu, p. 412.

9.21. Dintr-un punct P luat în planul unui cîmp dreptunghiular $ABCD$ s-au măsurat uighiurile α, β, γ, δ, sub care se văd respectiv laturile AB, BC, CD, DA. Să se calculeze raportul dimensiunilor cîmpului.

9.22. O corabie mergînd spre Est observă două faruri A și B și vede că ambele se află la Nord. După o jumătate de oră de mers, cele două faruri sînt văzute primul la Nord-Vest și al doilea la Nord-Nord-Vest. Știind că distanța dintre cele două faruri este de 10 km, să se afle cu ce viteză merge corabia.

9.23. O persoană mergînd pe un drum în linie dreaptă observă că cel mai mare unghi sub care se văd două puncte date, este α. Din acest moment el mai face un drum a pînă cînd cele două puncte apar ca unul singur și găsește că această direcție face unghiul β cu drumul.

Se cere distanța dintre cele două puncte.

9.24. Un stîlp vertical este văzut din trei puncte A, B, C, aflate pe o aceeași orizontală ce trece prin piciorul stîlpului, respectiv sub unghiurile α, 2α, 3α. Cunoscînd distanțele $AB=a$, $BC=b$, să se afle înălțimea x a stîlpului și să se demonstreze că dacă $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, atunci avem $5a=13\ b$.

9.25. Un obiect așezat pe un turn este văzut sub un unghi α dintr-un punct ce se află în planul orizontal, determinat de baza turnului și de distanța l de la bază. Cunoscînd înălțimea a a obiectului, să se determine înălțimea x a turnului.

9.26. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un patrat și cu unghiul x de la vîrful unei fețe laterale.

Să se afle în funcție de raza R și unghiul x.

a) Volumul piramidei înscrise.

b) Aria laterală și aria totală a piramidei.

c) Se calculează unghiul x cînd înălțimea piramidei este egală cu raza R a sferei.

9.27. Să se determine unghiul α pe care trebuie să-l facă două forțe concurente F_1 și F_2, pentru care rezultanta lor să fie $\frac{F_1+F_2}{2}$. *Discuție*. Aplicație. $F_1 = 1$ kg și $F_2 = 2$g.

9.28. Un corp se mișcă pe un plan înclinat sub acțiunea forței greutății cu o accelerație de n ori mai mică decît cea a căderii libere, coeficientul de frecare este egal cu k.

Să se determine unghiul x format de planul înclinat cu orizontala.

9.29. Două bare AB și AC sînt atîrnate în punctele B și C și articulate între ele în punctul A. Barele fac cu verticala punctului A unghiuri de 60 și 40°, iar în A se atîrnă o greutate de 200 kg.

Să se găsească forțele care întind fiecare din cele două bare, netinînd seama de greutatea lor.

9.30. Să se descompună o forță dată R în două forțe egale cu F. Cum variază componentele cînd unghiul lor variază?

9.31. Să se descompună o forță R în alte două forțe care fac între ele un unghi dat α, astfel încît suma numerică a componentelor să fie maximă. Aplicație pentru $R=200$ kg și $\alpha=120°$.

9.32. Trei bare articulate la capete formează un triunghi oarecare ABC. Pe axele articulațiilor din vîrfurile A, B, C sînt fixați cîte un scripete. Peste acești scripeți este trecut un cablu închis, care prin strîngere este supus la o tensiune T. Frecările fiind neglijate, să se afle forțele de reacțiune din articulații.

C.I.Ț. — G.M-B, p. 1136.

9.33. Într-un patrulater convex inscriptibil $ABCD$ raportul $\dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ nu depinde de raza cercului circumscris.

9.34. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit $A=a$. Fie H simetricul lui B față de latura CD, iar cu b și c se notează unghiurile HAB și HDC. Să se arate că avem relația:

$$\text{ctg } a + \text{ctg } c = 2 \text{ ctg } b.$$

9.35. Într-un patrulater oarecare $ABCD$, fie I intersecția dreptelor AB și CD, să se arate că:

$$IA \cdot IB \sin (CAB) = IC \cdot ID \sin (ACD) \sin (CDB).$$

9.36. Notînd cu a și b laturile, iar cu d_1 și d_2 diagonalele unui paralelogram, φ unghiul format de diagonale, iar θ unghiul format de laturi. Să se stabilească relația:

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \varphi}\right|.$$

C.I.Ț. 1933 G.M.B.

9.40. Dintr-un punct oarecare de pe cercul înscris într-un patrat $ABCD$ diagonalele pătratului se văd sub unghiurile x și y.

Să se arate că $\text{tg}^2 x + \text{tg}^2 y = 8$.

G.M.B. 1184.

9.38. Fie paralelogramul $ABCD$ și M intersecția diagonalelor. Notăm $\sphericalangle MAB=\alpha$, $\sphericalangle MBA=\beta$. Să se arate că:

$$\text{tg } A = \frac{-2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

9.39. Într-un paralelogram se dau: unghiul ascuţit α şi distanţele a şi b de la punctul de intersecţie al diagonalelor pînă la laturile neparalele. Să se determine lungimea diagonalelor şi aria paralelogramului.

9.40. Laturile unui patrulater convex $ABCD$ sînt $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, iar suma a două unghiuri opuse este θ. Dacă S este aria şi $2p$ perimetrul patrulaterului, să se demonstreze relaţia:

$$S^2=(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}\ .$$

9.41. Dacă φ este unghiul diagonalelor AC şi BD ale unui patrulater $ABCD$ convex, să se demonstreze că aria S a patrulaterului este dată de formula:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot \sin\ \varphi\ .$$

9.42. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor. (Teorema lui Ptolomeu).

9.43. Bazele unui trapez sînt egale cu 25 cm şi 15 cm; una din laturile neparalele este de 12 cm, iar unghiul dintre această latură şi baza mare de 50°. Să se calculeze aria trapezului.

9.44. Să se calculeze aria unui trapez isoscel a cărui diagonală este egală cu a şi formează cu baza unghiul α.

9.45. Latura unui hexagon regulat este de 84 cm. Să se afle latura unui poligon regulat cu 7 laturi echivalent cu hexagonul dat.

9.46. Se dă trapezul dreptunghic $ABCD$, cu unghiurile drepte în A şi D. Diagonala AC este perpendiculară pe latura BC.

Se prelungeşte latura DC cu segmentul $CE=\frac{DC}{4}$. Se uneşte E cu B, se duce bisectoarea unghiului CEB care întîlneşte pe AB în F. Să se arate că $AF=3\ CE$.

9.47. Se dau bazele a şi b ale unui trapez şi laturile neparalele c şi d. Să se determine unghiurile trapezului şi aria lui.

9.48. Se dau laturile a, , c, d ale unui patrulater înscris într-un cerc Să se afle unghiurile şi aria acestui patrulater.

9.49. O coardă lungă de a cm împarte cercul de rază R în două segmente de cerc. Să se calculeze aria segmentului mai mic.

9.50. Într-un cerc de rază R se duc două coarde paralele, fiecare din ele subîntinde un arc de α grade. Să se afle aria porţiunii de cerc cuprinsă între cele două coarde paralele.

9.51. Un semicerc este împărţit în două arce, al căror raport este $\frac{4}{7}$. Din punctul de diviziune al semicercului se coboară o perpendiculară pe diametru. Să se afle segmentele determinate de această perpendiculară pe diametru, ştiind că lungimea acestuia este de 11 cm.

9.52. Să se calculeze aria cuprinsă între trei cercuri tangente între ele, știind că razele sînt respectiv de 1 m, 2 m și 3 m.

9.53. Să se determine unghiul ascuțit al unui romb a cărui latură este medie proporțională între diagonalele sale.

9.54. Într-un sector de cerc cu raza de 8 cm se înscrie un cerc cu raza de 2 cm. Să se calculeze aria sectorului.

9.55. Se dă un cerc de rază R și un punct A situat la o distanță d de centru. Se duce prin punctul A o secantă, astfel că suma pătratelor segmentelor cuprinse între acest punct și punctele de intersecție cu circumferințe să fie egale cu 1 m^2. Să se calculeze unghiul α format de secantă și dreapta care unește punctul A cu centrul cercului.

9.56. Două roți de raze $R=1{,}50$ m, $r=0{,}50$ cm se găsesc în același plan. Distanța între centrele lor este $d=4$ cm. Să se determine cu două zecimale exacte lungimea unei curele încrucișate care ar fi întinsă pe aceste roți.

9.57. Într-un cerc de rază $OB=R$ se duce coarda BC și o dreaptă care trece prin centrul O al cercului și care intersectează coarda BC în punctul A.
Cunoscînd $OA=a$ și unghiul $OAB=\theta$, se cere:
a) Să se calculeze AC, AB și unghiul AOB.
b) Să se determine unghiul θ în așa fel încît să avem $AB=2AC$.

9.58. Să se exprime aria rombului $ABCD$ în funcție de razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD, respectiv R și r.

9.59. Fie un patrulater convex $ABCD$. Notăm respectiv cu x, y, z, u unghiurile ABD, ADB, BDC, DBC pe care diagonala BD le face cu laturile patrulaterului.
Să se arate că este necesar și suficient ca patrulaterul $ABCD$ să fie circumscriscriptibil dacă există relația:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

G.M.B. 1421, M. Iosifescu.

9.60. Fie D, E, F mijloacele laturilor AB, BC, CA ale unui triunghi oarecare ABC, K și L picioarele perpendiculare duse din D pe BC și AC; M și N picioarele perpendicularelor din E pe AB și AC, P și Q din F pe AB și BC. Fie MN, PQ, KL egale cu d_a, d_b, d_c. Notînd h_a, h_b, h_c, și m_a, m_b, m_c cele trei înălțimi și cele trei mediane.
Să se arate că $abc\, d_ad_bd_c = h_ah_bh_cm_am_bm_c$.
R.M.F. 1952, pr. 293.

9.61. Să se rezolve patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cunoscînd $AB = a$, $BC = b$, și diagonalele $AC = e$, $BD = f$.

9.62. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ se proiectează centrul cercului circumscris pe laturile patrulaterului în punctele M, N, P, Q, respectiv pe laturile AB, BC, CD, DA, și se notează $OM = \alpha$, $ON = \beta$, $OP = \gamma$, $OQ = \delta$. Să se calculeze unghiurile patrulaterului, R raza cercului circumscris și laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = d$ și $DA = d$, în funcție de α, β, γ, δ.

9.63. Fie patrulaterul inscriptibil căruia i se cunosc laturile $AB = a$ $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Să i se calculeze diagonalele $AC = x$ și $BD = y$.

9.64. Să se rezolve patrulaterul inscriptibil $ABCD$, cunoscînd laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ și R raza cercului circumscris.

9.65. Suma patratelor tangentelor unghiurilor sub care se văd dintr-un punct oarecare M al unui cerc, diametrele care trec prin vîrfurile opuse ale unui poligon regulat cu $2n$ laturi circumscris acestui cerc este egală cu: $\frac{2nk^2}{(k^2-1)^2}$, unde k este raportul dintre raza R și apotema a, G.M.B. 1765.

9.66. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic:

$$\cos A \leqslant \sin B \sin C$$

$$\cos A \cos B - \frac{1}{2} \sin C \sin 2C < \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C.$$

Pitagora, S.90 C.I.Ț. 1937.

9.67. Să se arate că între unghiurile unui triunghi ABC există relația:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

9.68. Să se arate că într-un triunghi ABC:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}.$$

9.69. Să se arate că într-un triunghi oarecare există inegalitatea:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

9.70. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$0 < \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

9.71. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghic ABC avem:

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A \geqslant 9.$$

9.72. Să se arate că în orice triunghi ascuțitunghi ABC avem:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \geqslant 9.$$

9.73. Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \geqslant 6\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C.$$

G.M.B. 1544 Gh. Bercea.

9.74. Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuţitunghi, avem:

$$\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 2\pi.$$

9.75. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\operatorname{cosec} \frac{A}{2} + \operatorname{cosec} \frac{B}{2} + \operatorname{cosec} \frac{C}{2} \geqslant 6.$$

9.76. Să se arate că într-un triunghi ABC:

$$8 \cos A \cos B \cos C \leqslant 1.$$

9.77. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relaţia:

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

9.78. Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$\Sigma \operatorname{cosec} A > \frac{9}{4} \Pi \sec \frac{A}{2}.$$

G.M.B. 5278 C.I.Ţ. 1963.

9.79. Să se arate că într-un triunghi ascuţitunghi ABC avem inegalităţile:

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{C}{2} \geqslant 12,$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} \geqslant 9.$$

9.80. Să se arate că într'un triunghi ascuţitunghi ABC avem inegalităţile;

$$\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C \geqslant 12,$$

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant 9.$$

9.81. Dacă A, B, C sint unghiurile unui triunghi oarecare, atunci:

$$m (m - 2) \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \geqslant 0,$$

m fiind un parametru real.

S.P. 351 C.I.Ţ. 1936.

9.82. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, există triunghiuri ale căror laturi să fie exprimate prin

$$\cos \frac{A}{2}, \quad \cos \frac{B}{2}, \quad \cos \frac{C}{2}.$$

9.83. Să se arate că între unghiurile unui triunghi ascuţitunghi ABC există inegalitatea:

$$\text{tg}^n A + \text{tg}^n B + \text{tg}^n C > 3 + \frac{3n}{2},$$

unde n este un număr natural oarecare.

9.84. Să se stabilească relaţia:

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leqslant 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare.
G.M.B. 5677. T. Albu, 1964.

9.85. Să se arate că în orice triunghi ABC există inegalitatea:

$$27 \cos A \cos B \cos C \leqslant 8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

9.86. Să se demonstreze următoarea inegalitate într-un triunghi oarecare:

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Capitolul 10

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR SPECIALE. RELAȚII ÎNTRE RAZELE CERCURILOR: ÎNSCRIS, CIRCUMSCRIS, EXÎNSCRISE UNUI TRIUNGHI; BISECTOARE, ÎNĂLȚIMI, MEDIANE. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIURI

10.1. Într-un triunghi dreptunghic se dă $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$. Să se calculeze $\sin(B - C)$.

10.2. Într-un triunghi dreptunghic se dă:

$$b = m^2 - n^2 \text{ și } c = 2m \cdot n.$$

Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ și $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ în funcție de m și n.

10.3. Să se rezolve triunghiul dreptunghic cunoscînd unghiul

$$B = 22°30' \text{ și } c - b = 8 \text{ cm}.$$

10.4. Să se rezolve triunghiul dreptunghic BAC, cunoscînd:

$$B = 37°30' \text{ și } a + c - b = 15 \text{ cm}.$$

10.5. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și diferența $b - c = d$.

10.6. Să se rezolve un triunghi dreptunghic, cunoscînd cateta b și diferența $a - c = d$.

10.7. Să se rezolve triunghiul dreptunghic BAC cu $A = 90°$ dîndu-se:

$$b + c = 10$$

$$\sin B + \sin C = \sqrt{2}.$$

10.8. Laturile unui triunghi dreptunghic formează o progresie aritmetică; să se calculeze unghiurile B și C ale triunghiului. Să se arate că singurele triunghiuri dreptunghice care satisfac condițiile din problemă sînt acelea ale căror laturi sînt proporționale cu 3; 4; 5.

10.9. Laturile unui triunghi dreptunghic formează o progresie geometrică. Să se calculeze unghiurile B și C ale triunghiului.

10.10. Într-un triunghi dreptunghic înălțimea dusă din vîrful unghiului drept, catetele și ipotenuza sînt în progresie geometrică. Să se afle rația acestei progresii și unghiurile triunghiului.

10.11. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd suma n a catetelor şi suma q a celor două segmente, care duse din vîrful unghiului drept împart ipotenuza în trei părţi egale. Discuţie.
C.D.P. de V. Cristescu, 406.

10.12. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd lungimea ipotenuzei şi a bisectoarei unghiului drept. Discuţie.

10.13. Să se rezolve un triunghi dreptunghic, cunoscînd perimetrul $2p$ şi înălţimea h corespunzătoare ipotenuzei.

Să se discute rezultatul obţinut.

10.14. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd perimetrul şi raza R a cercului ciscumscris. Discuţie.

10.15. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd raza r a cercului înscris şi ipotenuza a. Discuţie.

10.16. Să se rezolve un triunghi dreptunghic, cunoscînd razele r şi R ale cercurilor înscris şi circumscris.

10.17. Se dă un triunghi dreptunghic şi se duce mediana unghiului drept. Să se rezolve triunghiul, cunoscînd mediana şi razele cercurilor înscrise în cele două triunghiuri care s-au format prin ducerea medianei. Discuţie.

10.18. Într-un triunghi dreptunghic se cunoaşte perimetrul $2p$ şi aria m^2. Se cere:

a) Să se rezolve triunghiul.

b) Ce relaţie trebuie să existe între m şi p, pentru ca problema să admită o soluţie.

10.19. Se dă triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$. Să se rezolve triunghiul cunoscînd mediana $BB_1 = m$ şi unghiul $BB_1C = \alpha$.

10.20. Să se rezolve un triunghi isoscel cunoscînd înălţimea h corespunzătoare laturii neegale şi raza r a cercului înscris.

10.21. Să se determine unghiurile triunghiului isoscel pentru care $\frac{r}{R}$ este maxim (minim).

10.22. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relaţia:

$$\cos(2C - B) - \frac{c}{a^3}(3c^2 - 4a^2).$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 391.

10.23. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relaţia:

$$\mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{2(a^2 - bc)}{(a + b)(a + c)}.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 391.

10.24. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic există relaţia:

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}} - \frac{1}{\mathrm{ctg}\frac{B}{2} + \mathrm{ctg}\frac{C}{2}} = 1.$$

10.25. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC cunoscînd ipotenuza $BC = a$ și bisectoarea $AM = l$.

10.26. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd latura a, înălțimea h_b și înălțimea h_c.

Caz numeric: $a = 127$ m, $h_b = 105$ m, $h_c = 97$ m.

10.27. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd latura $BC = a$, mediana m_a și înălțimea h_a.

Caz numeric: $a = 75$ m, $m_a = 71$ m și $h_a = 63$ m.

10.28. Să se rezolve un triunghi cunoscînd pe

$$a,\ A \text{ și } b - c = d.$$

10.29. Să se rezolve un triunghi ABC cunoscînd latura $BC = a$, mediana m_a și înălțimea h_a.

10.30. Să se rezolve un triunghi ABC dacă se cunoaște unghiul A, latura a și r_a raza cercului exînscris.
R.M.T. 1094, V.A. 1932.

10.31. Să se rezolve un triunghi cunoscînd unghiul A, latura a și produsul k^2 al bisectoarelor interioare duse din celelalte două unghiuri. Discuție.
G.M.B. p. 352, 1944.

10.32. Să se afle elementele unui triunghi oarecare dacă $a = 370$ cm, $B = 86°3'$ și $C = 50°56'$.

10.33. Să se afle elementele unui triunghi oarecare, dacă $a = 225$ cm, $b = 800$ cm și $C = 36°44'$.

10.34. Să se afle elementele unui triunghi oarecare dacă $a = 13{,}9$ cm; $b = 8{,}43$ cm; $A = 126°43'$.

10.35. Să se afle elementele unui triunghi oarecare dacă $a = 19$ cm; $b = 34$ cm; $c = 49$ cm.

10.36. Să se calculeze elementele unui triunghi oarecare știind că $A = 78°40'$, $c = 15{,}14$ cm și $a - b = 6{,}24$ cm.

10.37. Să se calculeze elementele unui triunghi oarecare știind că $A = 95°30'$; $a = 63{,}51$ cm; $\frac{b}{c} = \frac{9}{11}$.

10.38. Într-un triunghi $A = 45°$ și laturile $b = 4$, $c = \sqrt{2}$. Să se calculeze fără table sinusul și cosinusul unghiurilor B și C.

10.39. Într-un triunghi să dă $A = 60°$ și $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$; b) unghiurile B și C.

10.40. Într-un triunghi ABC, $\sphericalangle A = 60°$ și $b = 2c$. Să se calculeze unghiurile și laturile triunghiului.

10.41. Laturile a, b, c ale unui triunghi satisfac relaţiile:

$$a = \frac{7}{3}c, \qquad b = \frac{8}{3}c.$$

Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ şi apoi să se deducă valoarea unghiului A.

10.42. Laturile unui triunghi sînt egale cu 27 şi $\sqrt{3}$, iar unghiul cuprins între ele este de 60°.

Să se calculeze ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel echivalent cu triunghiul considerat.

10.43. Să se rezolve un triunghi cunoscînd unghiul C, aria S şi suma $a + b - c = 2$ m.

10.44. Să se rezolve un triunghi ştiind că laturile sale sînt reprezentate prin trei numere întregi consecutive şi că cel mai mare unghi al triunghiului este dublul celui mai mic.

10.45. Să se calculeze laturile unui triunghi, ştiind că ele sînt reprezentate prin trei numere întregi consecutive şi că $S = 4p$. Să se exprime cosinusul unghiului mijlociu.

10.46. Într-un triunghi ABC se dă:

$$\sin B = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ şi } \sin C = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Să se calculeze $\sin(B + C)$, $\sin(B - C)$ şi $\cos(B - C)$; să se deducă unghiurile triunghiului.

10.47. În triunghiul ABC se unesc punctele D şi E, mijloacele laturilor AB şi AC, apoi se duce DF perpendiculară pe BC. Cunoscînd $DE = 10$ cm; $DF = 5$ cm; $B = 30°$, se cere să se rezolve triunghiul.

10.48. Să se rezolve un triunghi ABC, ştiind că raza cercului circumscris este $R = 8$, $A = 120°$, $B = 45°$.

10.49. Să se afle elementele unui triunghi oarecare, cunoscîndu-se

$$c = 226{,}8 \text{ cm}, \quad \frac{h_a}{b} = \frac{63}{65} \text{ şi } B = 17°4'.$$

10.50. Să se afle elementele unui triunghi ABC, cunoscînd $S = 15$ cm², $a \cdot b = 48$ şi $\sin A = \cos B$.

10.51. Să se afle elementele unui triunghi ABC cunoscînd $h_b = 60$ cm; $h_c = 36$ cm; şi $\frac{a}{R} = \cos A$.

10.52. Să se afle elementele unui triunghi ABC, cunoscînd $a = 23$ cm; $b = 45$ cm, şi $R = 25{,}09$ cm.

10.53. Să se afle elementele unui triunghi ABC, cunoscînd $b = 98$ cm, $c = 76$ cm şi $m_c = 68$ cm.

10.54. Se dă triunghiul ABC şi înălţimile AA' şi BB' care se întîlnesc în punctul H. Să se calculeze distanţa punctului H la unul din vîrfurile triunghiului.

10.55. Să se afle elementele unui triunghi ABC cunoscînd $a = 20$ cm, $b = 12$ cm; $m_c = 14$ cm.

10.56. Să se afle elementele unui triunghi ABC, cunoscînd $b = 42$ cm, $c = 28$ cm și bisectoarea l_a a unghiului A egală cu 12,81 cm.

10.57. Să se determine elementele unui triunghi cunoscînd latura a, înălțimea h_a și diferența $B - C = \alpha$ a unghiurilor adiacente laturii BC.

10.58. Să se afle elementele unui triunghi ABC cunoscînd latura a, înălțimea h_b și raza R a cercului circumscris. Discuție.

10.59. Să se rezolve un triunghi oarecare cunoscîndu-se aria sa S, unghiul C și $a + b - c = 2k$. Discuție.

10.60. Să se rezolve un triunghi cunoscîndu-se perimetrul, unghiul A și produsul m^2 al tangentelor trigonometrice ale jumătăților unghiurilor B și C.

10.61. Să se rezolve un triunghi cunoscîndu-se unghiul A, latura opusă $2a$ și mediana m_a corespunzătoare acestei laturi. Discuție.

10.62. Să se rezolve un triunghi isoscel cunoscîndu-se baza și bisectoarea unuia din unghiurile egale.

10.63. Să se rezolve un triunghi cunoscînd unghiul C și sumele $c + a = m$, $c + b = n$. Discuție.

10.64. Să se rezolve un triunghi cunoscîndu-se latura a, unghiul opus A și diferența $b^2 - c^2 = k^2$. Discuție.

10.65. Să se rezolve un triunghi cunoscîndu-se raza cercului înscris, unghiul A și înălțimea h_a corespunzătoare vîrfului, A. Discuție.

10.66. Să se determine unghiurile B și C ale unui triunghi cunoscînd unghiul A și raportul $\frac{h_b}{h_c} = m$ al înălțimilor duse din vîrfurile unghiurilor B și C.

10.67. Să se rezolve un triunghi cunoscîndu-se raza cercului circumscris, raza cercului înscris și una din înălțimi (h_a).

10.68. Să se rezolve un triunghi cunoscînd unghiul A și bisectoarele interioară și exterioară l și m a acestui unghi.

10.69. Să se rezolve un triunghi cunoscînd o latură a și razele R și r ale cercurilor înscris și circumscris.

10.70. Să se rezolve un triunghi cunoscînd latura a, suma $b + c$ a celorlalte două laturi și raza r a cercului înscris.

10.71. Să se rezolve un triunghi cunoscînd unghiurile A, B, C și aria S.

10.72. Să se rezolve un triunghi cunoscînd cele trei înălțimi h_a, h_b, h_c.

10.73. Să se afle elementele unui triunghi ABC cunoscînd $2p$, r și A.

10.74. Să se găsească laturile unui triunghi ABC dacă se dau r, raportul $\frac{h_b + h_c}{b + c} = k$ și B. Discuție.

10.75. Să se calculeze unghiurile unui triunghi, cînd se dau m_a, m_b și unghiul C.

10.76. Se dau două paralele situate la distanța h și pe una din ele două puncte A și B, astfel ca $AB = a$. Să se găsească pe cealaltă paralelă un punct C, astfel ca unghiul CBA să fie egal cu dublul unghiului CAB.

10.77. Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$\frac{a \cos A - b \cos B}{a \cos B - b \cos A} + \cos C = 0$$

$$\frac{a \sin A - b \sin B}{a \cos A - b \cos B} + \operatorname{tg} C = 0,$$

unde $A \neq B$.

C.I.Ț. R.M.T. 300/951.

10.78. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, unde AD este înălțime avem relația:

$$AD^2 = BD \cdot DC \mid \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \mid.$$

10.79. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$c \cos \alpha = b \cos (A - \alpha) + c \cos (B + \alpha),$$

unde α este un unghi oarecare.

10.80. Să se arate că în orice triunghi:

$$(b - c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + (c - a) \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + (a - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 0.$$

10.81. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$(c - a)(c \cos B + b \cos C) = ab (\cos A - \cos B) + a (a - c) \cos B.$$

10.82. Fie A_1 simetricul vîrfului A al unui triunghi oarecare ABC față de centrul cercului circumscris. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{AB - CA}{CA_1 - BA_1}.$$

10.83. Să se arate că în orice triunghi

$$\operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2} \text{ și analogele.}$$

10.84. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}.$$

notațiile fiind cele cunoscute.

10.85. Să se arate că razele cercurilor exînscrise unui triunghi sînt date de relațiile:

$$r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \text{ și analogele.}$$

10.86. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{A'A_1}{HA'} = \frac{|\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C|}{2},$$

unde AA' este înălțimea și AA_1 este mediana, H ortocentru.

19.87. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\operatorname{tg}(A-B)\operatorname{tg} C}{1+\sec(A-B)\sec C} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

10.88. Să se arate că în orice triunghi:

$$a(b+c)r_a + b(c+a)r_b + c(a+b)r_c = \frac{abcS}{r^2}.$$

10.89. Să se arate că bisectoarele interioare într-un triunghi oarecare ABC sînt date de formulele:

$$i_a = \frac{2}{b+c} bc \cos \frac{A}{2} \text{ și analogele.}$$

10.90. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2},$$

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C.$$

10.91. Să se arate că în orice triunghi:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} r_a r_b r_c = p^3 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

10.92. Pe mediana AA_1 a unui triunghi oarecare ABC se ia un punct P oarecare și se notează:

$\sphericalangle PBC = \beta$, $\sphericalangle PCB = \gamma$, Să se arate că:

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{A_1P\cdot\sin(B-C)}{A_1A\cdot\sin(B+C)}.$$

10.93. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)}{\sin(A+B)}.$$

10.94. Să se demonstreze că dacă mediana AA' a triunghiului ABC este egală cu latura BC, atunci:

a) $4\sin B \sin C \cos A = 3\sin^2 A.$

b) $1 + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C = 5\cos^2 A.$

c) $\cos 2B + \cos 2C + 5\sin^2 A = 2.$

10.95. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC, există relația:

$$MC^2 \cdot AB^2 + MB^2 \cdot AC^2 = AM^2 \cdot BC^2.$$

10.96. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem:

$$b \sin^2 \frac{C}{2} + c \sin^2 \frac{B}{2} = p - a.$$

10.97. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2} + B\right)}.$$

10.98. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$1 + \cos A \cos (B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 392.

10.99. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$a (b \cos C + c \cos B) = b^2 - c^2.$$

10.100. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$(b + c - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (c + a - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (a + b - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

10.101. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$(b - c) \cos^2 \frac{A}{2} + (c - a) \cos^2 \frac{B}{2} + (a - b) \cos^2 \frac{C}{2} = \\ = \frac{p (a - b) (b - c) (c - a)}{abc}.$$

10.102. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\frac{b+c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c+a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a+b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \\ = \frac{p}{abc} (a^2 + b^2 + c^2).$$

10.103. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\sum \frac{a + 2b}{a} \cos^2 \frac{A}{2} = \sum \frac{a + 2c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p^3}{abc}.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 397.

10.104. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{a + b + c}\right)^2 = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{2abc}.$$

10.105. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) + \frac{1}{b}(\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A) + \frac{1}{c}(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B).$$

10.106. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$2R + 2r = a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C.$$

10.107. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\frac{a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} + b^2 \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + c^2 \operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{a^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} + b^2 \operatorname{tg}\frac{B}{2} + c^2 \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{R + r}{R - r}.$$

C.D.P. V. Cristescu, p. 401.

10.108. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem:

$$(a \operatorname{tg} B - 2r_c)(b \operatorname{tg} C - 2r_a)(\operatorname{ctg} A - 2r_b) =$$
$$= -(a\operatorname{tg} C - 2r_b)(b\operatorname{tg} A - 2r_c)(\operatorname{ctg} C - 2r_a).$$

10.109. Fie A_1 și A_2 intersecțiile dreptei BC cu perpendicularele duse din vîrful A pe diametrul cercului circumscris triunghiului ABC și care trec respectiv prin B și C. Analog avem punctele B_1, B_2, C_1, C_2. Să se arate că:

$$A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2 = 8\,abc \cos A \cos B \cos C \text{ și } A_1A_2 \operatorname{tg} A = B_1B_2 \operatorname{tg} B.$$

G.M.B. 1948, p. 421. C.I.Ț.

10.110. Să se arate că într-un triunghi ABC avem:

$a\sin\theta = b\sin(C + \theta) - c\sin(B - \theta)$ și alte două relații analoge, unde $\neq 90\,k$.

10.111. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{R}{S}(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

10.112. Să se arate că în orice triunghi ABC

$$a = 8R \sin\frac{A}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right) \text{ și analogele.}$$

10.113. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi oarecare și P un punct în planul său. Notăm cu a_1, a_2, a_3, respectiv unghiurile PA_1A_3, PA_2A_1, PA_3A_2 și cu b_1, b_2, b_3 unghiurile PA_1A_2, PA_2A_3, PA_3A_1. Să se arate că

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 = \sin b_1 \sin b_2 \sin b_3.$$

Să se generalizeze pentru un poligon convex.

10.114. Să se arate că în orice triunghi ABC avem relația:

$$h_a + h_b + h_c = R\,[\,\Sigma\cos A + \Sigma\cos(A - B)].$$

10.115. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\Sigma\,(b^2 - c^2)\cos^2 A = 0.$$

10.116. Să se arate că în orice triunghi:

$$a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S,$$

H fiind ortocentrul.

10.117. Să se arate că în orice triunghi:

$$(a + c)\cos\frac{B}{4} + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}.$$

10.118. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\cos B + \cos C - \sin B - \sin C}{1 - \sin A - \cos A} = \cos B - \sin B\,\mathrm{ctg}\frac{A}{2}.$$

G.M. 4718, C.I.Ț. 1936.

10.119. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{a}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{C}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{4\,Rp}{r}.$$

10.120. Într-un triunghi ABC fie l_a și l'_a, respectiv bisectoarea interioară și exterioară a unghiului A. Să se arate că:

$$l_a = l'_a\,\mathrm{tg}\frac{B - C}{2}.$$

G.M.B. 1514. M. Zigulescu.

10.121. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relațiile:

$$a\sin B\sin(C - \alpha) - c\sin C\sin\alpha =$$
$$= b\sin C\sin(A - \alpha) - a\sin A\sin\alpha =$$
$$= c\sin A\sin(B - \alpha) - b\sin B\sin\alpha.$$

G.M.67, Gh. Țițeica, 1895.

10.122. Într-un triunghi oarecare ABC, trisectoarele unghiurilor se întîlnesc două cîte două alăturate fiecărei laturi în vîrfurile unui triunghi echilateral. Să se arate că latura acestui triunghi echilateral este

$$8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}.$$

10.123. Să se arate că în orice triunghi există relația:

$$(2r_b r_c - bc)\sin A\cos B = (2r_c r_a - ca)\cos A\sin B.$$

G.M.B. 1957, 2018.

10.124. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum \frac{r_a}{r_b} = \frac{r}{p} \sum \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

10.125. Într-un triunghi ascuţitunghi ABC există relaţia:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

10.126. Să se arate că între elementele unui triunghi există relaţiile:

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4S,$$
$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin(B - C).$$

G.M.B. 1349. N. Mihăileanu.

10.127. Să se arate că în orice triunghi avem:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}.$$

10.128. Să se arate că în orice triunghi:

$$a^3 d_a + b^3 d_b + c^3 d_c = 2S(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2),$$

unde prin d_a, d_b, d_c s-a notat distanţele de la centrul cercului circumscris la laturile triunghiului.

G.M. 4778, C.I.Ţ. 1937.

10.129. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{p}{R + r}.$$

10.130. Dacă într-un triunghi ABC notăm:

$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{m_1}{m_2}$ şi $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{m_1}{n_2}$, unde m_1, m_2, n_1 n_2 sînt numere pozitive şi $m_2 n_2 > m_1 n_1$ să se arate că:

$$\sin C = \frac{2(m_1 n_2 + m_2 n_1)(m_2 n_2 - m_1 n_1)}{(m_1^2 + m_2^2)(n_1^2 + n_2^2)}.$$

10.131. Într-un triunghi oarecare ABC, diametrul cercului circumscris ce trece prin A taie latura BC în punctul A_1. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{1}{AA_1} = \frac{1}{2R}(1 + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C).$$

10.132. Să se arate că în orice triunghi:

$$\sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{2R - r}{2R}.$$

R.M.T.-1448, C.I.Ţ. 1936.

10.133. Să se arate că în orice triunghi:

$$p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=4R(\cos A+\cos B+\cos C).$$

R.M.T. 1400, 1936.

10.134. Să se arate că în orice triunghi:

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin (B - C)$$

$$b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C) = a^2$$

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2(B - A) = 2bc \sin (2B - A).$$

R.M.T. 1528, V.A. 1937.

10.135. Să se arate că dacă centrul de greutate al unui triunghi se află pe cercul înscris în triunghi pe arcul corespunzător unghiului A există relația:

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}.$$

Capitolul 11.

APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI LA CALCULUL DE DISTANŢE, LA GEOMETRIA ÎN SPAŢIU.

11.1. O oblică formează cu un plan un unghi $\alpha = 43°53'$. Prin vîrful acestui unghi se duce în planul dat o altă dreaptă, care face cu proiecţia primei drepte pe plan un unghi $\beta = 11°10'$.

Să se afle unghiul φ dintre aceste două drepte.

11.2. Într-o prismă dreaptă cu baza un pătrat se duce prin mijloacele a două laturi consecutive de bază un plan care taie trei muchii laterale ale prismei şi este înclinat faţă de planul bazei cu un unghi α. Latura bazei fiind egală cu a, să se afle aria secţiunii obţinute.

11.3. O prismă are ca bază un triunghi echilateral cu latura a. Unul din vîrfurile bazei se proiectează în centrul celeilalte baze. Muchiile laterale sînt înclinate faţă de planul bazei cu un unghi α. Să se afle aria laterală a prismei.

11.4. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala bazei de 7,5 dm şi unghiul α dintre diagonalele bazei de $35°27'$. Unghiul format de planul bazei cu planul diagonal care trece prin latura mare a bazei este $\beta = 57°33'$. Să se afle volumul paralelipipedului.

11.5. Baza unei piramide este un triunghi echilateral. Una din feţele laterale ale piramidei este perpendiculară pe bază, iar celelalte două formează cu planul bazei un unghi α. Ce unghi fac muchiile laterale cu planul bazei.

11.6. Într-o piramidă cu baza un triunghi isoscel, unghiurile plane din vîrf sînt respectiv α, α şi β. Muchia laterală care este şi latura comună a celor două unghiuri diedre egale este perpendiculară pe planul bazei şi este egală cu a. Să se afle aria laterală a piramidei.

11.7. O piramidă are ca bază un romb cu latura a şi unghiul ascuţit α. Feţele laterale care cuprind unghiul α sînt perpendiculare pe bază, iar celelalte două formează cu aceasta unghiul φ. Să se afle aria laterală a acestei piramide.

11.8. Un trunchi de piramidă are feţele laterale egal înclinate pe baza mare cu un unghi φ. Cele două baze ale trunchiului de piramidă fiind trapeze isoscele cu raportul de asemănare $k < 1$.

Trapezul bazei mari are laturile paralele egale respectiv cu $2a$ şi $2b$. Se cere aria laterală şi volumul trunchiului de piramidă.

11.9. Se dă un cilindru echilateral avînd ca bază un cerc de rază R. Se ia un punct pe circumferința cercului de bază și se unește cu un alt punct situat pe circumferința celuilalt cerc. Dreapta care unește aceste două puncte face cu planul bazei un unghi α. Să se afle distanța cea mai scurtă dintre această dreaptă și axa cilindrului.

11.10. Să se afle muchia unui cub înscris într-un con a cărui generatoare de lungime l formează cu planul bazei un unghi α.

11.11. Într-un con, unghiul dintre generatoare și planul bazei este egal cu α, iar aria secțiunii axiale este egală cu Q. Să se afle aria totală a conului.

11.12. Secțiunea axială a unui con este un triunghi care are unghiul din vîrf egal cu α. Raza cercului circumscris acestui triunghi este R. Să se afle volumul conului.

11.13. Un cerc de rază $R = 5{,}38$ dm servește ca bază comună la două conuri construite de aceeași parte a bazei lor comune.

Generatoarea unui con formează cu planul bazei un unghi $\alpha = 74°28'$, iar generatoarea celuilalt con formează cu aceeași bază un unghi $\beta = 60°12'$.

Să se afle volumul cuprins între ariile laterale ale celor două conuri.

11.14. Să se arate că unghiurile diedre ale unui dodecaedru convex regulat sînt date de formula:

$$\cos \alpha = \frac{a_5(l_5 - l_5')}{l^5\,(2a_5^2 + a_5 - 1)},$$

unde a_5 și l_5 sînt respectiv apotema și latura pentagonului regulat convex înscris în cercul de rază egală cu unitatea și l'_5 este latura pentagonului regulat stelat înscris în același cerc.
S.G.M. 1935, 188. C.I.Ț.

11.15. Fie un unghi diedru drept cu muchia AB. Dintr-un punct C de pe AB ducem pe una din fețele diedrului $\sphericalangle BCM = \alpha < 90°$ și pe cealaltă față $\sphericalangle BCN = \beta < 90°$, notînd $\sphericalangle MCN = \varphi$.

Să se arate că $\cos \varphi = \cos\alpha \cos\beta$.

11.16. O placă triunghiulară ABC se îndoaie în jurul liniilor mijlocii ale triunghiului pînă ce vîrfurile A, B, C ce unesc într-un punct V formînd tetraedrul $VA_1B_1C_1$, unde A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele laturilor BC, AC, AB.

a) Să se arate că au loc relațiile:

$$\cos \alpha = \frac{2 \cos A}{\sin B \sin C} - 1 = 1 - 2 \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

unde α este unghiul diedru corespunzător muchiei B_1C_1.

b) Să se arate că volumul tetraedrului este:

$$V = \frac{1}{3} R^3 \sin A \sin B \sin C \sqrt{|\cos A \cos B \cos C|},$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Concurs. Etapa finală 1966. C. Ionescu-Țiu.

11.17. Fie o piramidă regulată cu poligonul de bază cu n laturi, x unghiul plan al unghiului diedru format de planul bazei cu o față, iar y unghiul plan, al unghiului diedru a două fețe laterale alăturate.

Să se arate că:

$$\cos\frac{y}{2} = \sin\frac{\pi}{n}\sin x.$$

R.M.F. 1952, G.D. 553.

11.18. Într-un trunchi de con circular drept este înscrisă o sferă. Volumul acestei sfere este egal cu jumătatea din volumul trunchiului de con. Se cere unghiul format de generatoare și baza conului.

11.19. Se dă un plan P, o dreaptă D cuprinsă în acest plan, un punct A exterior planului. Să se determine poziția unui triunghi echilateral ABC, care are latura BC cuprinsă în planul P și paralelă cu dreapta D, iar latura AB să facă cu planul P un unghi dat $\alpha < 60°$.

11.20. Fie o piramidă hexagonală regulată. Notăm cu α unghiul diedru a două fețe opuse, cu β unghiul diedru a două fețe laterale alăturate și cu γ unghiul format de o față laterală cu planul bazei. Să se arate că:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta} = 4\cos^2\gamma.$$

11.21. Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile fețelor unui tetraedru. Cu (S_2, S_3) notăm unghiul diedru format de fețele S_2 și S_3; să se arate că:

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2\,[S_2S_3\cos(S_2, S_3) +$$
$$+ S_3S_4\cos(S_3, S_4) + S_2S_4\cos(S_2, S_4)].$$

11.22. Într-o piramidă regulată $VABCD$ cu latura bazei a și înălțimea $VO = h$ se face o secțiune prin diagonala BD, care taie pe VC în E și face cu planul bazei un unghi $\alpha < 90°$. Să se afle volumul piramidei $VBDE$. G.M.B. 2354, 1957.

11.23. Prin vîrful A al unui triunghi ABC se duce un plan (P), B și C fiind de aceeași parte a planului. Latura AC face cu planul (P) un unghi ascuțit β, iar AB face cu același plan un unghi ascuțit γ, unghiul făcut de BC cu planul este notat α. Fie φ unghiul diedru format de planul (P) cu planul triunghiului ABC. Să se arate că:

$$\sin A\sin\alpha = |\sin B\sin\beta - \sin C\sin\gamma|,$$

$$\sin A\cos\varphi = \cos\beta\cos\gamma\cos(B'AC'),$$

unde A' și B' sînt proiecțiile lui A și B pe planul (P).

11.24. Într-un tetraedru echifacial $ABCD$ notăm cu α, β, γ unghiurile OAB, OAC, OAD unde O este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Să se arate că:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

11.25. În tetraedrul $VABC$, înălțimea VO face cu muchiile VA, VO, VC unghiurile α, β, γ, iar piciorul înălțimii VO coincide cu centrul cercului înscris bazei ABC. Să se arate că există relația:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{AB\cdot AC}+\frac{\mathrm{tg}^2\,\beta}{BA\cdot BC}+\frac{\mathrm{tg}^2\,\gamma}{CA\cdot CB}=\frac{1}{OV^2}.$$

11.26. Într-o piramidă regulată notăm cu n numărul laturilor, cu m mărimea laturii bazei și cu m' muchia laterală. Să se arate că:

$$\frac{m}{m'}<2\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

11.27. Să se arate că între unghiurile diedre α, β, γ corespunzătoare muchiilor unei fețe ale unui tetraedru echifacial există relațiile:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{1}{3},$$

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$, fețele fiind triunghiuri ascuțitunghiuri.

11.28. Să se arate că dacă α, β, γ sînt unghiurile formate de diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile care pleacă din același vîrf, avem inegalitatea:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha\;\mathrm{tg}^2\,\beta\;\mathrm{tg}^2\,\gamma>8.$$

11.29. Razele bazelor unui trunchi de con sînt R și r. Se duce un plan care face cu planul bazei mari un unghi β și care determină pe fiecare din bazele trunchiului de con cîte un arc de cerc egal cu φ. Să se afle aria secțiunii plane obținute.

11.30. Într-un trunchi de con, raportul ariilor bazelor este egal cu 4; generatoarea are lungimea l și este înclinată față de planul bazei cu un unghi φ. Să se afle volumul trunchiului.

11.31. Într-un trunchi de con este înscrisă o sferă de rază r. Generatoarea conului este inclinată cu unghiul α față de planul bazei. Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

11.32. O secțiune transversală care împarte un con în două părți echivalente trece prin centrul sferei circumscrise conului.
Să se afle unghiul dintre generatoarea conului și planul bazei sale.

11.33. Într-un con se înscriu două sfere, astfel încît ele să fie tangente la suprafața conului și, în același timp tangente între ele. Raportul razelor sferelor este $\frac{m}{n}=3$. Să se afle unghiul α al secțiunii axiale a conului.

11.34. Diagonala dusă din vîrful unghiului obtuz al unui paralelogram formează un unghi β, cu latura mică a paralelogramului. Distanța dintre laturile mari ale paralelogramului este egală cu h. Să se afle volumul corpului format prin rotirea paralelogramului în jurul unei axe care trece prin vîrful unghiului ascuțit α și este paralelă cu diagonala de mai sus.

11.35. Punctele $A, B, C, D, \ldots$ sînt vîrfurile unui poligon regulat. Ştiind că:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

să se afle cîte laturi are poligonul.

11.36. Să se calculeze volumul unui tetraedru, $VABC$ cunoscînd laturile a, b, c, ale triunghiului ABC şi unghiurile diedre α, β, γ făcute respectiv de feţele VBC, VAC, VAB cu planul ABC.

11.37. Să dă un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ şi se notează $\sphericalangle A_4A_1A_2 = \alpha$, $\sphericalangle A_2A_1A_3 = \beta$, $\sphericalangle A_3A_1A_4 = \gamma$ şi feţele opuse vîrfurilor A_2, A_3, A_4, respectiv cu S_2, S_3, S_4. Fie unghiul diedru $(S_2, S_4) = x$.

Să se stabilească relaţia:

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Capitolul 12.

CHESTIUNI DE EXAMEN DATE LA ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR, LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ, LA BACALAUREAT ȘI APLICAȚII ASUPRA PRODUSULUI SCALAR A DOI VECTORI.

12.1. Într-un paralelogram $ABCD$ fie $a = \sphericalangle CAB$ și $x = \sphericalangle CAD$ în așa fel că $a < x$. Fie E și F proiecțiile lui B și D pe diagonala AC. Se cere:

a) Să se exprime lungimea segmentului EF în funcție de unghiurile a și x și de diagonala $AC = m$.

b) Unghiul a fiind dat, să se calculeze tg x în cazul cînd E și F împart diagonala AC în trei părți egale.

c) Din valoarea găsită la punctul b să se construiască grafic unghiul k. La admitere în Institutul Politehnic—București.

12.2. Se dau expresiile:

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$B_1 = C\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - A\sin 2\alpha$$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

Să se arate că $B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$.

La admitere în Institutul Politehnic—Cluj, 1955.

12.3. Să se rezolve ecuația:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) +$$

$$+ \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right).$$

La admitere în Institutul politehnic—Iași.

12.4. Dacă A, B, C și a, b, c sînt unghiurile și laturile unui triunghi oarecare și notăm:

$$\cos x = \frac{a}{b+c};\ \cos y = \frac{b}{c+a},\ \cos z = \frac{c}{a+b},$$

să se arate că:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=1;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Facultatea electronică, 1949.

12.5. Într-un triunghi ABC există relația $b^2+c^2=5a^2$. Notăm cu α unghiul făcut de mediana din A cu latura BC.

Să se calculeze $\cos A$ și $\cos\alpha$.

Să se determine valorile maxime și minime ale unghiurilor A și α, cînd laturile a, b, c variază păstrînd relația dată.

La facultatea de fizică—București, 1962.

12.6. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}=\frac{\sin^2 A}{a^2}.$$

La Institutul politehnic—Galați, 1967.

12.7. Să se determine unghiul x pentru care expresia:

$E=(\cos x-i\sin x)(\cos 5x+i\sin 5x)$ are valoare reală.

La admitere în Universitatea din Tokio, 1964.

12.8. Să se găsească o relație algebrică între unghiurile x, y, z, astfel ca să aibă loc relația:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1.$$

La facultatea de matematică—Cluj, 1962.

12.9. Dacă a, b, c și A, B, C sînt notații într-un triunghi oarecare, se cere:

a) Să se găsească soluția generală a sistemului:

$$a\sin(x+y-z)+c\sin(-x+y-z)=b,$$
$$b\sin(-x+y+z)+a\sin(x-y+z)=c,$$
$$c\sin(x-y+z)+b\sin(x+y-z)=a,$$

în funcție de unghiurile A, B, C.

b) Să se determine relațiile pe care trebuie să le verifice unghiurile A, B, C, astfel ca x, y, z să fie unghiurile unui triunghi.

La admitere în facultatea de matematică — București, 1959.

12.10. Se consideră un triunghi ABC cu $A=60°$. Să se arate că:

$$b^2+c^2=a^2+bc.$$

$$2(\sin^2 B-\sin^2 C)=\sqrt{3}\sin(B-C).$$

La admitere în Academia Militară — București, 1966.

12.11. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A, a cărui ipotenuză BC este împărțită în n părți egale, n fiind un număr impar. Dacă se notează cu α unghiul sub care se vede din A subdiviziunea care conține mijlocul ipotenuzei, cu h înălțimea triunghiului și cu a ipotenuza, să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Olimpiada internațională — Sinaia, 1960.

12.12. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Olimpiada internațională, 1962.

12.13. Să se demonstreze că:

$$E = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Generalizare.

Olimpiada internațională, 1963.

12.14. Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ laturile consecutive ale unui poligon convex cu n laturi. Să se demonstreze că dacă toate unghiurile poligonului sînt egale și dacă $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, atunci în mod necesar avem $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Olimpiada internațională, 1963.

12.15. Presupunînd $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ arce astfel că $x_i \neq k\frac{\pi}{4}$, unde k este întreg, să se calculeze suma:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg} x_i} + \frac{1}{1-\operatorname{tg} x_i} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x_i} + \frac{1}{1-\operatorname{ctg} x_i}\right).$$

La olimpiada de matematică, 1963.

12.16. Știind că A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, să se afle:

a) Cea mai mică valoare posibilă a sumei;

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

b) Cea mai mare valoare a produsului:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

La olimpiada matematică din Anglia, 1966.

12.17. Să se arate că dacă $13° \leqslant x \leqslant 28°$, atunci:

a) $$\frac{3}{2} \leqslant \sin^2(4x + 8°) + \cos^2(4x - 82°) \leqslant 2;$$

b) $$0 \leqslant \operatorname{ctg}^2(4x + 8°) + \operatorname{tg}^2(4x - 82) \leqslant \frac{2}{3}.$$

G.M.B. 6662, C.I.Ț. 1964.

12.18. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 10°$, atunci:

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin(6x + 60°)\cos(6x - 30°) < 1;$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \sin(9x + 45°)\cos(9x - 45°) \leqslant 1;$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin(9x - 45°)\cos(9x + 45°) < 0.$$

G.M.B. 6829, C.I.Ț. 1965.

12.19. Dacă $f(\sin x) = g\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, să se arate că:

$$g(\sin x) = f\left(\frac{2\sin x}{1 + \sin^2 x}\right).$$

S.G.M. VII: 1000, C.I.Ț. 1947.

12.20. Se dau punctele $A(1, 2)$ și $B(4,1)$. Să se calculeze unghiul dintre vectorii de poziție ale punctelor A și B.

12.21. Se dau punctele $A(-2,3)$ și $B(3,5)$. Să se calculeze unghiurile formate de vectorul $\overline{AB}$ și vectorii de poziție a punctelor A și B.

12.22. Se dau vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Să se calculeze mărimea rezultantei $\bar{c}$ a acestor vectori.

12.23. Se dă $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ și $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j}$. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

12.24. Să se calculeze unghiul dintre vectorii:

$$\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} \text{ și } \bar{b} = \bar{i} + 5\bar{j}.$$

12.25. Cunoscînd vectorii $\overline{AB} = 3\bar{i} - 6\bar{j}$;

$\overline{BC} = \bar{i} + 7\bar{j}$ și $\overline{CA} = -3\bar{i} - \bar{j}$, să se determine unghiurile triunghiului construit pe acești vectori.

12.26. Să se calculeze lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii:

$\bar{A} = 5\bar{p} + 2\bar{q}$; $\bar{B} = \bar{p} - 3\bar{q}$, dacă se știe că $|\bar{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\bar{q}| = 3$ și că unghiul dintre vectorii $\bar{p}$ și $\bar{q}$ este egal cu $\frac{\pi}{4}$.

12.27. Să se verifice egalitatea:

$$\overline{a}^2 \cdot a = a' \cdot$$

12.28. Să se verifice egalitatea:

$$a\ (\overline{a} \cdot \overline{b}) = a^2 \cdot \overline{b} \cdot$$

12.29. Să se verifice egalitatea:

$$(\overline{a} + \overline{b})\ (\overline{a} - \overline{b}) = a^2 - b^2.$$

12.30. Să se verifice egalitatea:

$$\overline{a}\ (\overline{b} \cdot \overline{b}) = \overline{a} \cdot b^2.$$

12.31. Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ și $\overline{c}$ sînt trei vectori unitate (versori) care satisfac relația:

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0,$$

să se calculeze suma $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{c} \cdot \overline{a}$.

12.32. Să se verifice dacă identitatea:

$$(\overline{a} + \overline{b})^2 + (\overline{a} - \overline{b})^2 = 2(a^2 + b^2)$$

este valabilă și să se dea interpretarea geometrică.

12.33. Știind că vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ formează un triunghi, adică $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$, să se calculeze lungimea laturii c, considerînd pe $\overline{a}$ și $\overline{b}$ cunoscuți.

12.34. Într-un triunghi dreptunghic isoscel se duc mediane din vîrfurile unghiurilor ascuțite.

Folosind produsul scalar, să se calculeze unghiul dintre aceste mediane.

12.35. Notînd cu a și b laturile care pornesc din același vîrf al unui romb, să se demonstreze, folosind operațiile cu vectori, că diagonalele rombului sînt perpendiculare între ele.

12.36. Se dau vectorii $\overline{c}$ și $\overline{p} = \overline{a}\ (\overline{bc}) - \overline{b}\ (\overline{a} \cdot \overline{c})$.

Să se arate că vectorii $\overline{c}$ și $\overline{p}$ sînt perpendiculari.

12.37. Știind că $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$ și că unghiul dintre vectorii a și b este egal cu $\frac{2\pi}{3}$, să se determine pentru ce valoare a lui m vectorii $\overline{p} = m\overline{a} + 17\ \overline{b}$ și $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ sînt perpendiculari între ei.

12.38. Ce unghi formează între ei vectorii unitate $\overline{s}$ și $\overline{t}$ dacă se știe că vectorii $\overline{p} = \overline{s} + 2\overline{t}$ și $\overline{q} = 5\overline{s} - 4\overline{t}$ sînt perpendiculari între ei?

12.39. Să se găsească proiecția vectorului $\overline{a} = 10\ \overline{m} + 2\overline{n}$ pe o axă avînd sensul vectorului $\overline{b} = 5\ \overline{m} - 12\ \overline{n}$, dacă $\overline{m}$ și $\overline{n}$ sînt vectori unitate și perpendiculari între ei.

Să se calculeze unghiurile dintre axa de proiecție și vectorii unitate $\overline{m}$ și $\overline{n}$.

12.40. Să se deducă pe cale vectorială formula cosinusului sumei a două unghiuri.

12.41. Să se deducă pe cale vectorială formula cosinusului diferenței a două unghiuri.

12.42. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

La facultatea de matematică-mecanică din Iași, 1966.

12.43. a) Să se rezolve ecuația:

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1.$$

b) Se consideră funcțiile:

$$f(x) = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} \text{ și } g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Să se arate că:

$$f(x) + g(x) = -\frac{3\pi}{4} \text{ pentru } x \in (-\infty, -1],$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{4} \text{ pentru } x \in [-1, \infty).$$

La facultatea de matematică-mecanică din București, 1967.

12.44. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x},$$

apoi să se arate că $E = 4\cos(x + 30°)\cos(x - 30°)$.

La facultatea de matematică—Timișoara, 1966.

12.45. Să se arate fără a folosi tabele că:

$$E = \sin 70° \cos 50° + \sin 260° \cos 280° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Concursul de matematică, 1967, C.I.Ț.

12.46. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = c$ și $AC = b$. Să se arate că:

$$\frac{(a^2 + 2bc)(b - c)}{abc} = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}}{\cos B \cos C}$$

La admitere în Institutul politehnic, Cluj, 1966.

12.47. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin^2(45^\circ + x) - \sin^2(30^\circ - x) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2x) = \sin 2x.$$

La admitere în Institutul politehnic — Braşov, 1966.

12.48. Să se arate că:

$$\frac{\sin(2a+b)}{\sin a} + \frac{\sin(a+2b)}{\sin b} - 4\cos(a+b) = \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b\,(\sin^2 a + \sin^2 b).$$

La Institutul politehnic — Galaţi, 1967.

12.49. Să se transforme în produs expresia:

$$E = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg}(a+b+c).$$

La admitere în Institutul politehnic — Galaţi, 1966.

12.50. Să se transforme în produs expresia:

$$E = \sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x}, \text{ unde } \operatorname{tg} x > 0$$

şi să se afle valoarea ei pentru $x = 60^\circ$.

La admitere în Institutul politehnic — Galaţi, 1966.

12.51. Să se arate că:

$$E = \frac{\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a + \frac{\pi}{12}\right)} + \frac{\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a + \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2}{\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

La admitere în facultatea de fizică — Timişoara, 1966.

12.52. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1.$$

La admitere în Institutul de petrol şi gaze, 1967.

12.53. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0.$$

La admitere în I.S.E. — Bucureşti, sept. 1967.

12.54. a) Să se rezolve ecuaţia $\cos x + \cos^2 2x + \cos 3x = 0$.

b) Să se rezolve ecuaţia

$$1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0.$$

La admitere în Institutul pedagogic — Iaşi, 1967.

12.55. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Bacalaureat, Franţa, 1965.

12.56. a) Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2x + 2.$$

b) Să se calculeze $\sin 2x$ şi $\cos 2x$, în funcţie de valoarea pozitivă a lui $\operatorname{tg} x$ dată de ecuaţia precedentă.

La admitere în Institutul politehnic — Iaşi, 1966.

12.57. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 x + \sin^2 3x - \sin^2 5x = \sin^2 7x + \sin^2 9x + \sin^2 11x.$$

La admitere în Institutul politehnic — Braşov, 1966.

12.58. Se dă ecuaţia:

$$\sin x + \cos x = a.$$

a) Să se determine mulţimea valorilor lui a pentru care ecuaţia are soluţii reale.

b) Să se rezolve ecuaţia în cazul cînd $a = -1$.

La admitere în Institutul politehnic — Iaşi, 1966.

12.59. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\cos 2x = a(\cos x - \sin x).$$

La admitere în Institutul politehnic — Iaşi, 1967.

12.60. Se dă ecuaţia $1 + \cos 4x = m(\sin x - \cos x)^2$, în care m este un parametru.

a) Să se determine valorile lui $\sin 2x$ date de această ecuaţie.

b) Pentru care valori ale parametrului m ecuaţia admite cele mai multe soluţii?

La admitere în Institutul politehnic — Bucureşti, 1967.

12.61. Să se găsească toate valorile reale ale lui x din intervalul $[0,2\pi]$ care satisfac inegalităţile:

$$2\cos x \leqslant \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqslant \sqrt{2}.$$

G.M.B., 7178. O.I.M., 1965.

12.62. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0.$$

La admitere în facultatea de electronică — Craiova, 1966.

12.63. Dacă între laturile unui triunghi avem relaţia $2a = b + c$, atunci sînt satisfăcute şi relaţiile:

$$2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}\ ; \quad \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} = \frac{3}{2}.$$

La admitere în Institutul politehnic — Galaţi, 1966.

12.64. Funcțiile f și g definesc prin $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ și $g(x) = \cos 2x$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Pentru care valori ale lui x avem $f(x) = g(x)$?

b) Să se traseze pe aceeași figură graficele funcțiilor f și g.

c) Graficele respective se taie în A și B.

O paralelă la Ox la distanța p taie graficul funcției f între A și B în punctul D, iar graficul funcției g între A și B în C. Dacă se dă $CD = \frac{3\pi}{8}$, să se calculeze distanța p.

Examen final la liceu olandez, aprilie, 1967.

12.65. Se dau expresiile:

$$E_1 = \operatorname{tg}(x + y) + \operatorname{tg}(x - y),$$
$$E_2 = \operatorname{ctg}(x + y) + \operatorname{ctg}(x - y).$$

a) Să se transforme $E_1 + E_2$ și $E_1 - E_2$ în expresii calculabile prin logaritmi.

b) Să se arate că $\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}$ nu depinde de y,

c) Să se determine valorile lui x și y pentru care avem simultan $E_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ și $E_2 = 2\sqrt{3}$.

La admitere în Institutul politehnic — București, 1967.

12.66. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$2(\sin 2x + \sin 2y) = 2\sin(x + y) = 1.$$

La facultatea de matematică-mecanică, Iași, 1967.

12.67. Să se construiască graficul:

$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x.$$

La admitere în Institutul de construcții—București, 1966.

12.68. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$\frac{3 + \sin x}{2} = \sin\frac{x}{2}\sqrt{2(1 + \cos x)} + m(1 + \sin x)\ (3 - \sin x),$$

apoi să se afle toate valorile lui x pentru $m = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$.

La Facultatea de matematică — Timișoara, 1967.

12.69. Să se rezolve triunghiul în care se cunosc:

$$C = 30°,\ c = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})\ \text{cm și}\ a + b = 12\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

La Facultatea de matematică — Timișoara, 1967.

12.70. Se dau expresiile

$$E_1 = \sin x - \sin 2x + \sin 3x,$$
$$E_2 = \cos x - \sin 2x + \cos 3x.$$

a) Să se calculeze valorile acestor expresii în cazul cînd $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ pentru $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

b) Să se transforme E_1 şi E_2 în expresii calculabile prin logaritmi.

c) Să se determine valorile lui x pentru care $E_1 = E_2$.

La Institutul Politehnic — Bucureşti, 1968.

RĂSPUNSURI, INDICAȚII, SOLUȚII

Capitolul 1

1.1. Arcul de un radian are ca lungime raza cercului din care face parte, deci:

$$\frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{1^r}{2\pi} = \frac{1}{2 \times 3{,}1416}; \quad x = \frac{180^\circ}{3{,}1416} \cong 57^\circ 17' 44''.$$

1.2. $$\frac{1^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}; \quad x = \frac{3{,}1416}{180} \cong 0{,}01745.$$

1.3. $\pi - \frac{11\pi}{10} = -\frac{1}{10}\pi$ radiani este suplimentul în radiani.

În grade vechi este $-\frac{57^\circ 17' 44''}{10} = -5{,}43'46'',4$.

În grade noi este $-\frac{200^g}{10} = -20^g$.

1.4. $$\frac{57^\circ 17' 44'' \times 100}{90} = 63^g, 66172.$$

1.5. 200^g .... 3,1416 radiani; $\frac{3{,}1416 \times 60}{20} = \frac{3{,}1416}{3} = 1{,}0472$ radiani.

1.6. $$\frac{35^\circ \cdot 90^\circ}{100} = \frac{3150^\circ}{100} = 31^\circ 30'.$$

1.7. $1968^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 168^\circ$, deci arcul are 168°.

1.8. R. $72^\circ = 80^g$.

1.9. R. 45° şi 36° sau 50^g şi 40^g.

1.10. R. 135° şi — 45°.

1.11. Se construieşte un triunghi dreptunghic cu o catetă de 3 unităţi şi ipotenuza de 5 unităţi. Se calculează cealaltă catetă. Se ţine seama de semnele funcţiilor trigonometrice cînd unghiul este cuprins în intervalul (90°, 180°).

1.12. $\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{1}{\cos x}$, de unde:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

1.14. Avem:

$$(1 + \mathrm{tg}^2 a) + 2\,\mathrm{tg}\,a + (1 + \mathrm{ctg}^2 a) + 2\,\mathrm{ctg}\,a = \sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a + 2\,(\mathrm{tg}\,a + \mathrm{ctg}\,a) = \sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a + \frac{2\,(\sin^2 a + \cos^2 a)}{\sin a \cos a} = \sec^2 a + \mathrm{cosec}^2 a + 2\sec a\,\mathrm{cosec}\,a = (\sec a + \mathrm{cosec}\,a)^2.$$

1.15. Radicalii au sens. Se ridică la pătrat şi se ţine seama de condiţiile impuse.

1.16. Se înlocuieşte ctg x prin $\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$.

1.18. $\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1+a^2)} = \frac{4a}{(1-a^2)^2}$.

$$E_1 = \frac{4\sin x}{\cos^4 x} \cdot \frac{\sin^4 x}{4\cos x} = \mathrm{tg}^5 x.$$

$$E_2 = \frac{4\sec x}{\mathrm{tg}^4 x} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4\,\mathrm{cosec}\,x} = \mathrm{ctg}^8 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{ctg}^7 x.$$

1.19. $1 + \mathrm{tg}^4 x = (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x) \cdot \mathrm{tg}^2 x$.

1.20. Se înlocuieşte $\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ şi se verifică.

Dacă $\mathrm{tg}\,x \neq 1$, numitorii $1 - \mathrm{tg}\,x$ şi $1 - \mathrm{ctg}\,x$ sînt diferiţi de zero.

1.23. $\frac{\cos^4 A - 1}{\cos^2 A} = \frac{(\cos^2 A - 1)(\cos^2 A + 1)}{\cos^2 A} = -\,\mathrm{tg}^2 A\,(1 + \cos^2 A)$.

1.24. Folosim relaţiile evidente:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ şi } \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

şi obţinem relaţia din enunţ.

1.25. Numărătorul se mai scrie:

$$1 + \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = (1 + \sin x + \cos x)\,\frac{\sin x \cos x + 1}{\sin x \cos x}.$$

1.26. a) $\sin x \cdot \sec x + \sec x \cdot \cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + 1 = \operatorname{tg} x + 1.$

$$\text{b)}\ \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)\left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos x}\right)\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \cdot \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 1$$

$$\text{c)}\ (\sin x + \cos x)\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}\right) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}.$$

1.29. $\operatorname{tg} x + \sec x = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$. Deci:

$$\frac{(1 + \sin^2 x + 2 \sin x)^2 - (\cos^4 x)}{(1 + \sin^2 x + 2 \sin x) \cos^2 x} = \frac{(1 + \sin x)^4 - \cos^4 x}{(1 + \sin x)^2 \cos^2 x} =$$

$$= \frac{[(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x]\,(1 + \sin x + \cos x)\,(1 + \sin x - \cos x)}{(1 + \sin x)^2 \cos^2 x}.$$

1.32. Identitatea devine:

$$\frac{1 + \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} + \frac{(1 + \sin x)(1 + \cos x)}{\sin x \cos x} = 0, \quad \text{sau}$$

$(1 + \sin x + \cos x) \sin x \cos x + (1 + \sin x)(1 + \cos x)(1 - \sin x - \cos x) = 0$
$\sin x \cos x + \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x + 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x -$
$- \sin x - \sin^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x \cos x - \cos x - \sin x \cos x - \cos^2 x -$
$- \sin x \cos^2 x = 0$ sau $1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0.$

1.33. $\sin^2 x + \sin^2 y \pm 2 \sin x \sin y + (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 y) = 1 +$
$+ \sin^2 y \sin^2 y \pm 2 \sin x \sin y = (1 \pm \sin x \sin y)^2.$

1.34. Ținem seama că $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ și $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$;

$$1 - \sin^2 a - \cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 a = \sin^2 a \cos^2 a.$$

1.35. Se înlocuiește totul în funcție de $\sin x$ și $\cos x$.

1.36. Pentru prima identitate exprimăm totul în funcție de cosinus, pentru a doua exprimăm în funcție de cosecantă, iar pentru a treia în funcție de sinus.

1.37. Se înlocuiește numai în funcție de tangentă.

1.38. $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x$. Partea I devine: $(\cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 + \cos^2 x)^2 = (\cos^4 x - \cos^2 x + 1)^2$, adică tocmai partea a doua.

Rezultă $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$, evidentă, deoarece se mai scrie

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{sau}$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

1.40. $\dfrac{\sin^4 a \cos^4 a}{\cos^4 a} - 6\,\dfrac{\sin^2 a \cos^4 a}{\cos^2 a} + \cos^4 a = \sin^4 a + \cos^4 a - 6\cos^2 a \sin^2 a =$

$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 8 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 8 \sin^2 a \cos^2 a.$

1.42. $\dfrac{1}{\cos^2 a} + \dfrac{1}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a \sin^2 a} = \sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a.$

1.43. Notăm $\operatorname{tg}^2 x = y$, $\sec^2 x = 1 + y$. Relația devine:

$(1 + 2y)\,[1 + 16y\,(1 + y)] = 15\,[y^2 - (1 + y)^2 + 16\,[y^3 + (1 + y)^3],$

sau

$1 + 16y + 16y^2 + 2y + 32y^2 + 32y^2 = -15 - 30y + 32y^2 + 48y^2 + 48y + 16$

care este evidentă.

1.44. $E = (\sin^2 x + \cos^2 x)\,(\sin^2 x - \cos^2 x)\,(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4\cos^6 x -$
$- 6\cos^4 x + 4\cos^2 x = \sin^6 x + \cos^4 x\,(1 + \sin^2 x) + 3\cos^6 x - \cos^6 x - 5\cos^4 x +$
$+ 3\cos^2 x = \sin^6 x - \cos^6 x + 2\cos^6 x - 3\cos^4 x + 2\cos^2 x = \sin^6 x + \cos^6 x +$
$+ 3\cos^2 x \sin^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1.$

1.45. Relația devine:

$$\frac{\dfrac{\sin a + 1}{\cos a} - \dfrac{\cos a}{\sin a + 1}}{\dfrac{\sin a + 1}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{\sin a + 1}} = \frac{1 + \sin^2 a + 2\sin a - \cos^2 a}{1 + \sin^2 a + 2\sin a + \cos^2 a} = \frac{2\sin^2 a + 2\sin a}{2 + 2\sin a} = \sin a.$$

1.46. Folosim relația:

$$\frac{1}{(1 + a)^3} + \frac{1}{(1 - a)^3} = \frac{2 + 6a^2}{(1 - a^2)^2} \text{ și obținem:}$$

$$E = \frac{2 + 6\sin^2 x}{\cos^6 x} \cdot \frac{\sin^6 x}{2 + 6\cos^2 x} = \frac{1 + 3\sin^2 x}{1 + 3\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg}^6 x.$$

1.47. $\dfrac{1}{(1 - a)^3} - \dfrac{1}{(1 + a)^3} = \dfrac{6a + 2a^3}{(1 - a^2)^3}$

$$\frac{6\cos x + 2\cos^3 x}{\sin^6 x} \cdot \frac{\cos^6 x}{6\sin x + 2\sin^3 x} = \frac{(3 + \cos^2 x)\cos^7 x}{(3 + \sin^2 x)\sin^7 x}$$

1.48. $\dfrac{1}{(1 - a)^3} + \dfrac{1}{(1 + a)^3} = \dfrac{2 + 6a^2}{(1 - a^2)^3}$;

$$\frac{1}{(1 - a)^3} - \frac{1}{(1 + a)^3} = \frac{6a + 2a^3}{(1 - a^2)^3} \text{ ; Avem:}$$

$$\frac{2 + 6\cos^2 x}{\sin^6 x} \cdot \frac{\cos^6 x}{6\sin x + 2\sin^3 x} = \frac{1 + 3\cos^2 x}{3 + \sin^2 x} \cdot \frac{\cos^6 x}{\cos^7 x}.$$

1.49. O bilă tangentă la suprafaţa interioară a torului are punctele de tangenţă pe un cerc mare al ei. Planul cercului descris de centrul cercului dat, pe care-l numim plan ecuatorial, taie torul după două cercuri concentrice ecuatoriale, iar bilele după cercuri mari. Să considerăm bilele vecine de centre O_1 şi O_2 şi fie T punctul lor de tangenţă. Planul tangent comun acestor bile este tăiat de planul ecuatorial după o tangentă, care, fiind perpendiculară pe mijlocul laturii O_1O_2 a triunghiului isoscel O_1OO_2, trece prin vîrful O.

Raza unei bile este r, $\sphericalangle\, O_1OO_2 = \frac{2\pi}{n}$; $\sphericalangle\, O_1OT = \frac{\pi}{n}$; $r = O_1T = R\sin\frac{\pi}{n}$;

$$\rho = OT = R\cos\frac{\pi}{n}.$$

1.50. Fie A şi B centrele a două sfere vecine şi O centrul inelelor. $\sphericalangle\, AOB = \frac{2\pi}{n}$. Notăm cu ρ raza bilei.

$$\frac{\rho}{r+\rho} = \sin\frac{\pi}{n};\quad \rho = \frac{r\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}.$$

$$R = \frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)r}{1-\sin\frac{\pi}{n}};\quad \frac{r}{R} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}.$$

1.51. $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{ctg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 15°}$;

$$\operatorname{tg} 55° = \operatorname{ctg} 35° = \frac{1}{\operatorname{tg} 35°}.$$

1.53. Dezvoltînd obţinem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cos^2 a = 0.$

1.54. $\sin^5 x + \cos^5 x = (\sin x + \cos x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x -$
$- \sin x\cos^2 x + \cos^4 x) = (\sin x + \cos x)\,[(\sin^4 x + \cos^4 x) -$
$- \sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x\cos^2 x]$; se ţine apoi seama de prima egalitate de enunţ şi se descompune apoi:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x;$$

$$\sin^5 x + \cos^5 x = \frac{a}{4}(5 - a^4).$$

1.55. $C = 60°$; $c = 75(\sqrt{3} - 1)$, $a = 50(3 - \sqrt{3})$, $b = 25(3 - \sqrt{3})$.

1.56. Se ţine seama că $\sin C = \sin \frac{45^\circ}{2}$; de asemenea că $\sin C = \frac{c}{a}$, că $a - c = 20$, de unde se poate calcula a. Se calculează apoi catetele b şi c.

1.57. $C = 36^\circ 52' 11''$ şi $B = 53^\circ 7' 49''$.

1.58. Unghiul la centru sub care se vede latura poligonului este $\frac{2\pi}{n}$.

Pentru poligonul înscris $\frac{1}{2} l_n = R \sin \frac{\pi}{n}$, $a_n = R \cos \frac{\pi}{n}$.

$$A_n = \frac{n l_n \cdot a_n}{2} = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}.$$

Pentru poligonul circumscris avem:

$$\frac{1}{2} l'_n = R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}; \quad a'_n = R; \quad A'_n = \frac{n l'_n a'_n}{2} = nR^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Observare. $A'_n > A_n$, deci $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$ sau $1 > \cos^2 \frac{\pi}{n}$.

$$\frac{A'_n}{A_n} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

b) Raportul perimetrelor este $\frac{n l'_n}{n l_n} = \frac{l'_n}{l_n} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$.

1.59. $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$; $\cos C = \frac{b}{a}$, deci:

$$b + c = 6 \text{ şi } \frac{b}{c} = \frac{4b^2}{a^2}; \quad 4bc = b^2 + c^2$$

$$b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc, \text{ deci } 4bc = 36 - 2bc$$

de unde $b + c = 6$. Catetele sînt date de rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 - 6x + 6 = 0, \text{ deci } b = 3 + \sqrt{3},\ c = 3 - \sqrt{3};\ a = 2\sqrt{6}$$

Verificare $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 4 \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{24}$.

1.60. Se observă că:

$$\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG} = \frac{AB}{AF} = \frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AD} = \frac{AK}{AC} = \frac{LK}{BC} = \frac{AL}{AB}.$$

Din triunghiurile dreptunghice BCD, CDE, DEF, EFG, avem:

$$AD = \frac{AC^2}{AB}; \quad AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AC^3}{AB^2};$$

$$AF = \frac{AE^2}{AD} = \frac{AC^4}{AB^3}; \quad AG = \frac{AF^2}{AE} = \frac{AC^5}{AB^4}.$$

De unde: $\frac{AB}{AG} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^5$ sau $\operatorname{tg}^5 (ACB) = \operatorname{tg} (AGB)$

1.61. $\overline{MA} = -\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$; $\overline{MB} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$,

$$\overline{MC} = \frac{\overline{b}+\overline{a}}{2}; \quad \overline{MD} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}.$$

1.62. Se prelungesc laturile AD și BC și AB. Laturile AD și BC se intersectează în punctul F, iar laturile AB cu FC se intersectează în punctul E. Din triunghiurile ACE, ACF, ABD, MBC, APQ și paralelogramul dat se deduc identitățile cerute.

1.63. $\overline{AM} = \frac{\overline{c}-\overline{b}}{2}$; $\overline{BN} = \frac{\overline{a}-\overline{c}}{2}$; $\overline{CP} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$.

1.64. $\overline{CD} = -\overline{p} + \overline{q}$; $\overline{DE} = -\overline{p}$; $\overline{EF} = -\overline{q}$; $\overline{FA} = \overline{p} - \overline{q}$; $\overline{AC} =$

$$= \overline{p} + \overline{q}; \quad \overline{AD} = 2\overline{q}, \quad \overline{AE} = 2\overline{q} - \overline{p}.$$

1.65. $\overline{AC} = \frac{3}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n}$; $\overline{AD} = \overline{m} + \overline{n}$;

$$\overline{AF} = -\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n}; \quad \overline{EF} = -\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n}.$$

1.66. $\overline{BC} = \frac{b}{a}\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{CD} = \frac{b-a}{a} \cdot \overline{a}$;

$$\overline{AC} = \frac{a-b}{a}\overline{a} + \overline{b}; \quad \overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}.$$

1.67. $\overline{BC} = \overline{B'C} = \overline{q}$; $\overline{CD} = \overline{C'D'} = -\overline{p}$; $\overline{AB'} = \overline{DC'} = \overline{p} + \overline{r}$; $\overline{AD'} =$

$$= \overline{BC'} = \overline{q} + \overline{r}; \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} = \overline{p} + \overline{q}; \quad \overline{AC'} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r};$$

$$\overline{CA'} = -\overline{p} - \overline{q} + \overline{r}; \quad \overline{D'A'} = -\overline{q}; \quad \overline{A'B'} = \overline{p}; \quad \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \overline{r};$$

$$\overline{BA'} = \overline{CD'} = -\overline{p} + \overline{r}; \quad \overline{DA'} = \overline{CB'} = -\overline{q} + \overline{r}; \quad \overline{BD} = \overline{B'D'} = -\overline{p} + \overline{q};$$

$$\overline{BD'} = -\overline{p} + \overline{q} + \overline{r}; \quad \overline{DB'} = \overline{p} - \overline{q} + \overline{r}.$$

1.68. Fie poligonul regulat cu $(2k + 1)$ laturi înscris în cercul de centru O.

Se consideră $2k+1$ forțe egale cu măsura cu raza cercului și dirijate de la O către fiecare vîrf. Avem:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} F_i = 0.$$

Se proiectează pe direcția unei forțe și se scrie că suma proiecțiilor este nulă.

1.69. Două cîte două din funcțiile trigonometrice sinus și tangentă înt egale în valoarea absolută, dar de semn contrar, deci se anulează.

Pentru funcția cosinus n este par, se anulează de asemenea două cîte două, iar în caz că n este impar, considerînd că suma vectorilor $\overline{OA}_2 + \overline{OA}_3 + \ldots + \overline{OA}_n$ proiectați pe axa OA_1 plus vectorul OA_1 dă zero vectori și fac echilibru.

2.1. Avem:

$$\frac{\cos x + \dfrac{1}{\cos x}}{\cos x - \dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x - 1}; \quad \cos x \neq 0, \quad x \neq 180\ k.$$

2.2. Se ridică la pătrat și la cub identitatea

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2.3. Folosim relația $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, deci:

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x,$$

$$\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3 = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x.$$

Egalitatea devine:

$\dfrac{2\sin^4 x - 2\sin^2 x}{3\sin^4 x - 3\sin^2 x} = \dfrac{2}{3}$ dacă $\sin^2 x \neq 0$ și $\cos^2 x \neq 0$, adică dacă $x \neq k\,\dfrac{\pi}{2}$.

2.4. Grupăm termenii ținînd seama de relația $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

$$\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 c =$$

$$\cos^2 a\,[\cos^2 c\,(\sin^2 b + \cos^2 b) + \sin^2 c\,(\sin^2 b + \cos^2 b)] = \cos^2 a.$$

Analog:

$$\sin^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 c +$$

$$+ \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = \sin^2 a.$$

2.5. Se scrie:

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha)$; se dau apoi în ultima paranteză factori comuni.

2.6. $\sin^6 x = (1 - \cos^2 x)^3$; $1 + \sin^2 x = 2 - \cos^2 x$,

$$(1 - \cos^2 x)^3 (1 + \cos^2 x) - \cos^6 x\,(2 - \cos^2 x) = 1 - 2\cos^2 x,$$

Partea I devine:

$$1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x + \cos^2 x - 3\cos^4 x + 3\cos^6 x - \cos^8 x -$$
$$- 2\cos^6 x + \cos^8 x = 1 - 2\cos^2 x.$$

2.7. Se exprimă $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$ şi se mai ţine seama că $\sin\alpha\cos\alpha$ are acelaşi semn cu $\operatorname{tg}\alpha$.

Se obţine:

$$F = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{a\operatorname{tg}^2\alpha + b\operatorname{tg}\alpha + c}.$$

2.8. $\sin a + \cos a \neq 0$. Expresia devine:

$$\sin^2 a - \sin a\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a + \sin a\cos a + \cos^2 a =$$
$$= 2(\sin^2 a + \cos^2 a) = 2.$$

2.9. Înlocuim $\operatorname{ctg} x$ cu $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ şi obţinem:

$$\frac{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^4} + \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg} x)^4} = 0, \quad \text{unde} \quad x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

2.10. Avem $\sec x = \frac{ac - b}{a^2 - b^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{a - ac}{a^2 - b^2}$.

Ţinînd seama de relaţia $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, se obţine:

$$a^2 + 1 = b^2 + c^2 \text{ unde } a \neq \pm b.$$

2.11. Se rezolvă sistemul de ecuaţii ca şi cînd $\sin x$ şi $\cos x$ ar fi necunoscute. Rezultatele obţinute pentru $\sin x$ şi $\cos x$ se vor substitui în:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ şi se va obţine condiţia:}$$

$$2m^2 - (\sqrt{3} + 1)m + \sqrt{3} - 1 = 0, \text{ ceea ce dă:}$$

$$m_1 = 1 \text{ şi } m_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ şi apoi obţinem } x_1 = 90° \text{ şi } x_2 = 210°.$$

2.14. $2(x^2 + y^2) = (m + n)^2$.

2.16. $a\operatorname{tg}^2 x + b = 1 + \operatorname{tg}^2 x;\quad b\operatorname{tg}^2 y + a = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$

$$(a - 1)\operatorname{tg}^2 x = 1 - b;\ (b - 1)\operatorname{tg}^2 y = 1 - a;$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 y} = \frac{(1 - b)^2}{(1 - a)^2}; \text{ însă } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 y} = \frac{b^2}{a^2},$$

de unde:

$$\frac{1 - b}{1 - a} = \pm\frac{a}{b} \quad \text{sau } a = b \text{ şi } a + b = 2ab.$$

2.17. Dezvoltăm și înmulțim cu $\cos x$;

$$\frac{\sin x\cos x}{a}+b=\sin x\left(\frac{1}{c}+d\right)=\frac{1}{e}+f\sin x\cos x;$$

$$\sin x\cos x\left(\frac{1}{a}-f\right)=\frac{1}{e};\ \sin x\cos x=\frac{a(1-cb)}{e(1-af)}$$

$$\left(\frac{1-eb}{e(1-af)}+b\right):\left(\frac{1}{c}+d\right)=\sin x \text{ sau}$$

$$\sin x=\frac{c(1-abef)}{e(1-af)(1+cd)};\quad \cos x=\frac{a(1-cb)(1+cd)}{c(1-abef)}.$$

Înlocuim în relația $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, obținem:

$$\frac{c^2e^2(1-abef)^2}{(1-af)^2(1+cd)^2}+\frac{a^2(1-eb)^2(1+cd)^2}{c^2(1-abef)^2}=1.$$

2.18. Avem o progresie geometrică cu rația:

$$q=-\frac{1}{2}\sin x;\quad \left|-\frac{1}{2}\sin x\right|<1.$$

Se folosește suma $1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x},\ |x|<1.$

2.19. Folosim relația $\frac{1}{\sin 2^k x}=\operatorname{ctg} 2^{k-1}x-\operatorname{ctg} 2^k x.$

Dăm lui k valorile $1, 2, 3, \ldots, n$ și adunăm.

2.24. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=1;\ \operatorname{tg}^2 x\neq 1,$

deci $x\neq 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°.$

Pentru a doua egalitate $\cos 2x\neq 1$; deci $2x\neq 180°\,k,\ x\neq 90°\,k,$

$$x\neq 0, 90°,\ 180°,\ 270°.$$

Pentru a treia egalitate $\operatorname{tg} 3x\neq -1.$

$$3x\neq 180°k+135°,\quad x\neq 60°\,k+45° \text{ sau}$$

$$x\neq 45°,\ 105°,\ 165°,\ 225°,\ 285°,\ 345°.$$

Pentru a patra egalitate $\sin 5x\neq -1$

$$5x=360°\,k+270°;\quad x=72°\,k+54°, \text{ adică:}$$

$$x\neq 54°,\ 128°,\ 190°,\ 262°,\ 334°.$$

2.27. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

$$\sin\left(\frac{31\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{32\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(16\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos(5\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x;$$

$$-\sin(11\pi - x) = -\sin(12\pi - \pi - x) = -\sin(-\pi - x) =$$

$= \sin(\pi + x) = -\sin x$. Expresia devine:

$$E = -\sin x + \sin x - \cos x - \sin x = -(\sin x + \cos x).$$

2.28. $\sin(x + 300^g) = \sin(x + 270^\circ) = \sin(90^\circ - x) = -\cos x;$

$$\cos(200^g - x) = \cos(180^\circ - x) = -\cos x.$$

$$E_1 = -2\cos x.$$

$$\sin(x + 100^g) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x.$$

$$E_2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2.29. Arcul de măsură $\frac{\pi}{11}$ este subîntins de latura unui poligon regulat convex cu 22 de laturi $A_1A_2 \ldots A_{22}$.

Coardele A_2A_{11}, A_3A_{10}, A_4A_9, A_5A_8 și A_6A_7 sînt paralele cu diametrul A_1A_{12}.

$$\cos\frac{\pi}{11} = \frac{A_2A_{11}}{2R}; \quad \cos\frac{2\pi}{11} = \frac{A_3A_{10}}{2R}; \quad \cos\frac{3\pi}{11} = \frac{A_4A_9}{2a};$$

$$\cos\frac{4\pi}{11} = \frac{A_5A_8}{2R} \quad \text{și} \quad \cos\frac{5\pi}{11} = \frac{A_6A_7}{2R}.$$

Se ajunge la relația:

$$A_2A_{11} - A_3A_{10} + A_4A_9 - A_5A_8 + A_6A_7 = R = \frac{1}{2}.$$

Generalizare. Considerăm un cerc de rază $\frac{1}{2}$, în care se înscrie poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_{4k+2}$ cu $2(2k + 1)$ laturi.

Se ajunge la relația:

$$\cos\frac{\pi}{2k+1} - \cos\frac{2\pi}{2k+1} + \cos\frac{3\pi}{2k+1} \ldots (-1)^{k-1}\cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

echivalentă cu relația:

$$A_2A_{2k+1} - A_3A_{2k} + A_4A_{2k-1} - A_5A_{2k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}A_{k+1}A_{k+2} = R = \frac{1}{2}.$$

2.31. Avem $\text{tg}\, x - |\text{tg}\, x| = 0$. Avem $\text{tg}\, x \geqslant 0$, deci:

$$k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ și } \pi + k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\pi,$$

unde k este întreg.

2.32. $\text{tg}\, x + \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{\cos^2 x}} = \text{tg}\, x + \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \text{tg}\, x + |\text{tg}\, x| = 0.$

Deci $\text{tg}\, x \leqslant 0$ sau $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right]$, $k \in N$.

2.33. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \geqslant 0$, deci condiția $\text{cosec}\, x + \text{ctg}\, x \geqslant 0$, (1)

În această condiție (1) ridicăm la pătrat:

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x} = \left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^2 = (\text{cosec}\, x + \text{ctg}\, x)^2.$$

Să arătăm cînd $\text{cosec}\, x + \text{ctg}\, x \leqslant 0$

sau $\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} \leqslant 0.$

Pentru $\cos x = -1$ și numitorul și numărătorul se anulează, deci ia forma $\frac{0}{0}$ pentru $x = 180°$, iar ctg 180° nu are sens.

Rămîne deci să arătăm numai cînd $\frac{1+\cos x}{\sin x} < 0.$

În cadranul I și II, fracția nu poate fi negativă, nefiind negativ nici numărătorul nici numitorul. În cadranul III și IV, numărătorul este pozitiv și numitorul negativ, deci:

$$x \in (180°;\ 360°).$$

2.34. Mai întîi este necesar să avem $\cos x < 0$, deoarece suma a două cantități pozitive nu poate fi zero. În acest caz ridicăm la pătrat relația:

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{\sec^2 x - 1}\, \cos x$ și obținem

$1 - \cos^2 x = (\sec^2 x - 1)\cos^2 x$ sau

$1 - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$, care este adevărată.

Prin urmare, singura condiție este $\cos x < 0$, de unde $x \in (90°,\ 270°)$.

2.35. Este necesar ca $\sin \frac{x}{2}$ să fie negativ, deoarece $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}$ este pozitiv.

Deci $$180° + 360\,k \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 360° + 360°\,k$$
sau
$$360° + 720°\,k \leqslant x \leqslant 720° - 720°\,k.$$

Se observă că $x \geqslant 360°$, deci nu este nici o valoare pentru x în intervalul $(0, 360°)$ care să satisfacă relaţia dată.

2.36. $\sqrt{1 - \cos^2 5x} = -\sin 5x \geqslant 0$, deci $\sin 5x \leqslant 0$,
$$180° + 360°\,k \leqslant 5x \leqslant 360°\,k + 360° \text{ sau}$$
$$36° + 72°\,k \leqslant x\ 72°\,k + 72°, \text{ deci:}$$
$$x \in [36°, 72°] \cup [108°, 144°] \cup [180°, 216°] \cup [252°, 288°] \cup [324°, 360°].$$

2.37. Deoarece $\sqrt{1 - \cos^2 3x}$ este pozitiv, urmează că $\sin 3x \geqslant 0$, deci $0 + 360°\,k \leqslant 3x \leqslant 180° + 360°k$ sau
$$120°\,k \leqslant x \leqslant 60° + 120°\,k, \text{ deci:}$$
$$x \in [0, 60°] \cup [120°, 180°].$$

2.38. Deoarece $\sqrt{\sec^2 6x - 1} \geqslant 0$, $\operatorname{tg} 6x \leqslant 0$, de unde:
$$90° + 180°\,k < 6x < 180° + 180°k \text{ sau}$$
$$15° + 30°\,k < x < 30° + 30°\,k.$$
Rezultă:
$$x \in (15°, 30°] \cup (45°, 60°] \cup (75°, 90°] \cup (105°, 120°] \cup$$
$$\cup (135°, 150°] \cup (165°, 180°] \cup (195°, 210°] \cup (225°, 240°] \cup$$
$$\cup (255°, 270°] \cup (285°, 300°] \cup (315°, 330°] \cup (345°, 360°].$$
în total 12 intervale.

2.39. Relaţia se mai scrie
$$|\sin 5x| + \operatorname{tg} 5x\ |\cos 5x| = |\sin 5x| + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} |\cos 5x| = 0,$$
care este verificată numai dacă $\operatorname{tg} 5x \leqslant 0$, sau
$$180°k \leqslant 5x < 180°\,k + 90°,$$
$$36°\,k \leqslant x < 36°\,k + 18°,$$
k ia valorile 0, 1, 2, 3,... şi obţinem:
$$0 \leqslant x < 18°;\ 36° \leqslant x < 54°;$$
$$72° \leqslant x < 90°;\ 108 \leqslant x < 126°;$$
$$154° \leqslant x < 172°;\ 190° \leqslant x < 208°.$$
Rezultă $x \in [0, 18°) \cup [36°, 54°) \cup [72°, 90°) \cup [154,° 172°)$.

2.40. Avem $\sin x \geqslant 0$ şi notăm $\sin x = t \leqslant 1$

$$\sqrt{1-t} - \sqrt{2t} \neq 0;\ 1 - t \neq 2t;\ t \neq \frac{1}{3}.$$

Aducem la acelaşi numitor şi eliminăm numitorii:

$$2\sqrt{1-t}.\sqrt{1-t} + 2(1 - t - 2t) = 0 \text{ sau}$$

$$|1 - t| + 1 - 3t = 0;\ 2 - 4t = 0;\ t = \frac{1}{2}, \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = 360°\,k + 90° \pm 60°.$$

2.41. Ambele părţi fiind pozitive ridicăm la pătrat şi avem:

$$E^2 = \frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} = \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right)^2 = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2.$$

2.42. $\Delta = \sin^2 a - \sin a = \sin a\,(\sin a - 1) = 0.$

$$x = \sin a \pm \sqrt{\sin a\,(\sin a - 1)}$$

rădăcinile sînt reale dacă:

$$-1 \leqslant \sin a < 0;\ 180° < a < 360° \text{ şi } a = 90°.$$

2.43. Realizantul este:

$$\Delta = \cos^2 a - (1 - \sin a)\,(1 + \sin a) = 0.$$

Trinomul are deci semnul coeficientului lui x^2, adică pozitiv.

2.44. $\Delta_x = 4 - (2\sin a - 1)\,(4\sin a + 2) = 6 - 8\sin^2 a;$

$$2(3 - 4\sin^2 a) = 0;\ \sin a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta \geqslant 0, \text{ dacă } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci cînd:}$$

$$a \in [0, 60°] \cup [120°, 240°] \cup [300°, 360°]$$

rădăcinile sînt reale.

2.45. Rădăcinile sînt imaginare cînd:

$$\Delta_x = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha < 0 \text{ sau}$$

$$90° < 2\alpha < 270°, \text{ deci } 45° < \alpha < 135° \text{ şi}$$

$$450° < 2\alpha < 630°, \text{ deci } 225° < \alpha < 315°.$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha > 0,\ x \in (90°,\ 180°) \cup (270°,\ 360°).$$

$$P = x_1 x_2 = 1.$$

α	Δ	S	P	Natura rădăcinilor
0	+	—	+	2 rădăcini negative
45°	0			$x_1 = x_2$
	—	—	+	rădăcini complexe
90°				
	—	+	+	rădăcini complexe
135°	0			$x_1 = x_2$
	+	+	+	2 rădăcini pozitive
180°				
	+	—	+	o rădăcină negativă
225°	0			$x_1 = x_2$
	—	—	+	rădăcini complexe
270°				
	—	+	+	rădăcini complexe
315°	0			$x_1 = x_2$
360°	+	+	+	2 rădăcini pozitive

2.47. $x^2 = \dfrac{1 + \sin a \cos b \pm (\sin a + \cos b)}{\cos^2 a}$

$$x_1^2 = \frac{1 + \sin a \cos b + \sin a + \cos b}{\cos^2 a} = \frac{(1 + \sin a)\ (1 + \cos b)}{1 - \sin^2 a} = \frac{1 + \cos b}{1 - \sin b}.$$

$$x_2^2 = \frac{(1 - \sin a)\ (1 - \cos b)}{1 - \sin^2 a} = \frac{1 - \cos b}{1 + \sin a}.$$

Rezultă:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos b}{1 - \sin a}}\ \text{și}\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \sin a}},\ \text{sau}$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}\cos\frac{b}{2}}{\pm\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)};\quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{b}{2}}{\pm\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2}\right)}.$$

2.48. $x_1 = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$; $x_2 = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{12}$.

2.49. $\Delta_x = \sin^2 a - 2 + 2\cos a = -\cos^2 a + 2\cos a - 1 = -(\cos a - 1)^2 < 0.$

Dacă $1 - \cos a = 0$, $x = \frac{1}{2 \sin a}$ şi $x_{1\,2} = \frac{\sin a \pm i(1 - \cos a)}{2(1 - \cos)\, a}$.

2.53. $\Delta = \sin^2 a - (1 - \cos a)(1 + \cos a) = 0$.

Trinomul are semnul lui $(1+\cos a) > 0$, deoarece $|\cos a| \leqslant 1$.

2.54. $\Delta = (\cos a + \sin a)^2 - 3 - 2\cos a + 2\sin a = 2(\sin a - 1)(\cos a + 1)$. Dar $\sin a - 1 < 0$ şi $\cos a + 1 > 0$, deci $\Delta < 0$; coeficientul lui x^2 este: $A = 3 + 2\cos a - 2\sin a = (2\sin a \cos a + 1) - 2(\cos a + 1)(\sin a - 1) =$ $= (\sin a + \cos a)^2 - \Delta > 0$, deoarece $(\sin a + \cos a)^2 > 0$ şi $\Delta < 0$.

Realizantul fiind negativ şi coeficientul lui x^2 pozitiv, trinomul este mereu pozitiv.

2.56. Realizantul ecuaţiei este:

$\Delta = \sin^2 a \cos^2 a - \cos^2 a = -\cos^4 a \leqslant 0$ semnul $=$ este pentru $\cos a = 0$,

$$a = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\ ;\ x = 0,$$

2.57. Ecuaţia $x^2 - 2x \sin a \cos a + \sin^2 a = 0$ are realizantul:

$$\Delta = \sin^2 a \cos^2 a - \sin^2 a = -\sin^4 a < 0,$$

deducem inegalitatea cerută, semnul egal fiind pentru $a = k\pi$.

2.61. În locul axelor xOy se consideră axele $xO'y'$, axa y' deplasată spre stînga cu $\frac{\pi}{6}$ pentru a mări argumentul. Se consideră pe aceste axe funcţia $y = \cos 3x$, apoi $f(x) = 2y$.

Funcţia $y = \cos 3x$ este de 3 ori mai strînsă decît funcţia $\cos x$, deci perioada este $\frac{2\pi}{3}$; (120°), iar amplitudinea este 2. Funcţia $g(x)$ în acelaşi sistem de axe cu $f(x)$ are funcţia cosinus lărgită de 3 ori, adică are perioada 6π; (1080)° iar amplitudinea de 2 ori ca a funcţiei $\cos x$.

2.62. Mai întîi este necesar să avem $\frac{a}{b} > 0$, adică a şi b să aibă acelaşi semn şi $\frac{a}{a+b} > 0$. Condiţia $\frac{a}{a+b} > 0$ este îndeplinită dacă a şi b sînt de acelaşi semn. Observăm că y nu poate fi decît în cadranul I sau III, unde $\operatorname{tg} y > 0$.

$$\sin^2 x = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}\ ;\ a \neq 0.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y \text{ sau } \sin x = \pm \cos y\ .$$

Pentru $0 < y < 90°$, avem : $x = 90° - y$;

$x = 360° - (90° - y) = 270° + y$; $x = 180° - (90° - y) = 90° + y$ şi $x =$ $= 180° + 90° - y = 270° - y$.

Pentru $180° < y < 270°$ avem $x = 270° - y$ sau $x = 180° - (270° - y) = y - 90°$; $x = 180° - (y - 90°) = 90° + y$ și $x = 270° + y$.

2.63. Avem sistemul $1 + 2\sin 2x \geqslant 0$; $1 - 2\cos 3x \geqslant 0$, sau $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$ și $\cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$

$\sin 2x > -\frac{1}{2}$ ne dă $x_1 \in (180k - 15°\ 180k - 105°)$, iar

$\cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$ ne dă $x_2 \in (120k - 20°,\ 120k + 20°)$

x_1 este cuprins în intervalele $(0{,}105°) \cup (165{,}°\ 285°) \cup (245°,\ 360°)$, ... iar x_2 aparține intervalelor:

$x_2 \in (0{,}20°) \cup (100°,\ 140°) \cup (220°,\ 260°) \cup (340°,\ 360°)$.

$x = x_1 \cap x_2$. deci $x \in (0{,}20°) \cup (220°,\ 260°) \cup (345°,\ 360°)$.

2.64. $\frac{8k\pi}{18} = \frac{4k\pi}{9}$ sau în grade sexagesimale $\frac{720°}{9}k = 80°k$.

Cel mai mic multiplu comun al lui 360° și 80° este 720°. Pînă ca $80k$ să devină 720°, k ia valorile 1, 2, ..., 9 și unghiurile respective sînt 80°, 160°, 240°, 320°, 400°, 480°, 560°, 640°, 720°, sau pe cerc corespund unghiurile 80°, 160° 240°, 320°, 40°, 120°, 200°, 280°, 360°. Dintre acestea, afară de 360°, celelalte sînt simetrice față de (0°, 180°) două cîte două 80° cu 280°,160° cu 200°, 240° cu 120° și 320° cu 40°, sumele fiecărei perechi fiind de cîte 360°. Deci, în total sînt 5 valori distincte: cos 40°, cos 80°, cos 120°, cos 160° și cos 0°.

2.65. Deoarece 180 și 7 sînt prime între ele $\frac{7k\pi}{180}$, $(7k°)$ ia orice valoare întreagă de grad sexagesimal, deci 360 valori în grade, care corespund la 180 valori distincte, deoarece două cîte două au același sinus.

2.66. $\frac{k\pi}{\sqrt{3}}$ și $\frac{k'\pi}{\sqrt{3}}$ nu pot să difere între ele cu un număr întreg de π, deoarece:

$\frac{k\pi}{\sqrt{3}} - \frac{k'\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(k - k') \neq$ întreg un număr irațional diferă de un întreg.

2.67.

$$360k + 30° < x < 360k + 45°$$
$$360k + 135° < x < 360k + 150°$$
$$360k + 210° < x < 360k + 225°$$
$$360k + 315° < x < 360k + 330°$$

2.68. $2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ sau

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

2.69. Deoarece $0 < |\cos x| < 1$, rezultă:

$$0 \leqslant 1 - |\cos x| \leqslant 1 - |\cos x|^2 = \sin^2 x,$$

de unde deducem:

$$\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x.$$

Pentru egalitatea este necesară condiţia:

$|\cos x| = \cos^2 x$, adică $\cos x = \pm 1$ şi $\cos x = 0$, deci $x = 90k$, k fiind întreg.

2.70. Fie un triunghi isoscel ABC cu $AB = BC = 1$, $\sphericalangle ABC = 36°$. Bisectoarea din A taie latura BC în D şi paralela din B la AC în E. Notăm cu I intersecţia bisectoarelor şi cu K proiecţia lui D pe BI, iar L proiecţia lui A pe BC.

$$BL = \cos 36°; BI = \operatorname{tg} 36° \text{ deoarece } \sphericalangle BAE = \sphericalangle AEB = 36°$$

$$\sphericalangle KDI = 36° \quad \sphericalangle KID = 54° \text{ deci } KD > KI;\ BD > BK.$$

Deoarece $BD + DK > BK + KI$ adică $BL > BI$.

2.71. Tangenta trigonometrică este pozitivă în cadranul unu şi trei, adică $0° \leqslant 6x \leqslant 90°$ şi $180° \leqslant 6x \leqslant 270°$.

În general se scrie (perioada fiind de 180°).

$$0° + 180k \leqslant 6x < 90° + 180k, \text{ de unde:}$$

$$0 + 30k \leqslant x < 15° + 30k. \text{ Rezultă:}$$

$$x \in [0, 15°) \cup [30°, 45°) \cup [60°, 75°) \cup [90°, 105°) \cup [120°, 135°) \cup$$
$$\cup [150°, 165°) \cup [180°, 195°) \cup [210°, 225) \cup [240°, 255°) \cup [270°, 285°) \cup$$
$$\cup [300°, 315°) \cup [330°, 345°), \text{ în total 12 intervale.}$$

2.72. Sub radicali, avem cantităţi pozitive.

Ridicăm la pătrat şi obţinem:

$$2 + 2|\cos 6x| \geqslant 2 - 2\cos 6x \text{ sau } |\cos 6x| \geqslant -\cos 6x.$$

Dacă $6x$ este în cadranul I şi IV se verifică.

Egalitate avem dacă $\cos 6x = 0$, adică dacă $6x = 180k + 90°$ sau $x = 30k + 15°$, deci pentru $x = 15°, 45°, 75°, 105°, 135°, 165°, 195°, 225°, 255°, 285°, 315°, 345°$.

Inegalitate avem pentru:

$$360k \leqslant 6x < 360k + 90° \text{ şi}$$
$$360k + 270° < 6x \leqslant 360° (k + 1)$$
$$60k \leqslant x < 60k + 15° \text{ şi}$$
$$60k + 45° < x \leqslant 60(k + 1).$$

De unde avem:

$$x \in [0,15) \cup (45°, 60°] \cup [60,° 75°) \cup (105°, 120°] \cup [120°, 135°) \cup$$
$$\cup [165°, 180°] \cup [180°, 195°) \cup (225°, 240°] \cup [240°, 255°) \cup (285°, 300°] \cup$$
$$\cup [300°, 315°) \cup (345°, 360] \text{ sau}$$
$$x \in [0,15°) \cup (45°, 75°) \cup [105°, 135°) \cup (165° \ 195°) \cup (225°, 255°) \cup$$
$$\cup (285°, 315°) \cup (345°, 360°).$$

2.73. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ punctele de diviziune $AB < n\, AA_1$. Avem $AB = 2R \sin x$ iar $AA_1 = 2\, R \sin \frac{\pi}{n}$.

2.74. Avem:

$$\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{4\pi}{21}, \text{ deci: } \cos\frac{\pi}{n} \geqslant \cos\frac{4\pi}{21} \text{ cum } \frac{4\pi}{21} < \frac{\pi}{3}, \text{ rezultă:}$$

$$\cos\frac{4\pi}{21} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{21}{25} = 1 - \frac{1}{1+\frac{21}{4}}.$$

Însă cum $1 - \frac{1}{1+\frac{21}{4}}$ este mai mare decît $1 - \frac{1}{1+n}$, unde $n \geqslant \frac{21}{4}$,

rezultă:

$$\cos\frac{4\pi}{21} > 1 - \frac{1}{1+n}, \text{ deci cu atît mai mult } \cos\frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{1+n}.$$

2.75. Deoarece $n \geqslant 3$, arcul $\frac{\pi}{n}$ este cuprins între 0° și $\frac{\pi}{3}$ radiani.

Mărimea unui arc în radiani cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$ este mai mare decît sinusul și mai mică decît tangenta acestui arc, deci:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n}.$$

Înmulțim cu $2\cos^2\frac{\pi}{2n}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \cdot \cos^2\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n} \cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2n} \text{ sau}$$

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}.$$

Deoarece $n \geqslant 3$, avem $\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{6}$, deci:

$$\cos\frac{\pi}{2n}\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sau } \cos^2\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{3}{4},$$

$$\text{de unde } \sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}.$$

2.77. În egalitatea $(1-\cos^2 x)^n = \sin^{2n} x$ dezvoltăm după binomul lui Newton și obținem:

$$1 - C_n^1 \cos^2 x + C_n^2 \cos^4 x - C_n^3 \cos^6 x + \ldots + (-1)^n C_n^n \cos^{2n} x = \sin^{2n} x,$$

din care rezultă relația din enunț.

2.78. Folosim relația $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ și obținem $P(x) : Q(x)$, unde:

$$P(x) = 7 \sin^{31} x + 8 \sin^{13} x - 5 \sin^9 x - 2 \text{ și}$$

$$Q(x) = \sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x + 1.$$

$P(x) = C(x)\, Q(x) + R(x)$, unde $C(x)$ este cîtul și $R(x)$ restul.

Pentru $Q(x) = 0$ obținem $P_1(x) = R(x)$.

Notăm $\sin x = a$; $Q(x) = \frac{a^5 - 1}{a - 1}$; $a^5 = 1$; $a \neq 1$.

Pentru $\sin^5 x = 1$, $Q(x) = 0$ și obținem:

$P_1(x) = 7 \sin x + 8 \sin^3 x - 5 \sin^4 x - 2$, de unde adunînd $5\,Q(x)$, obținem:

$$R(x) = -5 \sin^4 x + 7 \sin x - 2 + 5(\sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x + 1) = 13 \sin^3 x + 5 \sin^2 x + 12 \sin x + 3.$$

3.1. $\sin^2 a \pm 2 \sin a \sin b + \sin^2 b + (1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) = 1 + \sin^2 a \sin^2 b \pm 2 \sin a \sin b = (1 \pm \sin a \sin b)^2$.

3.2. Se dezvoltă și se dă factor comun $\cos a$ și $\sin a$.

3.5. Folosim relațiile:

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin (a+b) \sin (a-b);$$
$$\cos^2 a - \sin^2 b = \cos (a+b) \cos (a-b).$$

Obținem:

$$\frac{\sin (a+b)}{\sin (a-b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin (a-b)} = \frac{\sin (a-b) + 2 \cos a \sin b}{\sin (a-b)} = 1 + \frac{2 \cos a \sin b}{\sin (a-b)}.$$

$$\frac{\cos (a+b)}{\cos (a-b)} = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{\cos (a-b)} = \frac{\cos (a-b) - 2 \sin a \sin b}{\cos (a-b)} = 1 - \frac{2 \sin a \sin b}{\cos (a-b)}.$$

3.7. Se dezvoltă $\sin^2 (a+b)$ și se grupează termenii, apoi înlocuind pe b prin $(-b)$, se obține relația:

$$\sin^2 (a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos (a-b).$$

Scăzînd această relație din prima, obținem ușor a doua relație din enunț.

3.10. $(1+\operatorname{tg} a)^2 = \left(\frac{\sin a + \cos a}{\cos a}\right)^2 = \frac{1 + \sin 2a}{\cos^2 a}.$

$$(1 + \operatorname{ctg} a)^2 = \frac{1 + \sin 2a}{\sin^2 a};$$

$$\frac{(1 + \sin 2a)(\cos^2 a + \sin^2 a)}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{4(1 + \sin 2a)}{\sin^2 2a}.$$

3.11. $\sin^2 15° = \frac{1 - \cos 30°}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ și $\cos^2 15° = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$,

$$\frac{1}{\cos^2 15°} + \frac{1}{\sin^2 15°} = 4\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \frac{4}{1} = 16.$$

3.12. $\operatorname{tg}(45° - A) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg} A} = \dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$; $\cos A \neq 0$,

$$\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{(\cos A - \sin A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{1 - 2\sin A \cos A}{\cos 2A} = \frac{1}{\cos 2A} - \frac{\sin 2A}{\cos 2A} =$$

$$= \sec 2A - \operatorname{tg} 2A.$$

3.13. $\dfrac{1}{\cos 2x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} =$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}(45° + x).$$

b) $\dfrac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)}{\sin x} = \dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2}{\sin x} = \Big(\dfrac{\cos x}{\sin x} -$

$$- 1)(1 + 2\sin x \cos x) = (\operatorname{ctg} x - 1)(1 + \sin 2x\Big).$$

3.14. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Rezultă:

$8\cos^4 x - 12\cos^2 x + 5 = \cos 4x - 2\cos 2x + 2$. Analog

$8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = \cos 4x + 2\cos 2x + 2$.

Facem produsul și obținem partea a doua.

3.15. $\dfrac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} + \dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \dfrac{-4\sin a \cos a}{\sin^2 a - \cos^2 a} = \dfrac{4}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a} = \dfrac{-2\sin 2a}{-\cos 2a} =$

$$= 2\operatorname{tg} 2a.$$

3.17. $\operatorname{tg} a = \dfrac{2\sin a \cos a}{2\cos^2 2a - 1 + 1} = \dfrac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \dfrac{2\sin 2a \cos 2a}{2(1 + \cos 2a)\cos 2a} =$

$$= \frac{\sin 4a}{2\cos 2a + 2\cos^2 2a} = \frac{\sin 4a}{1 + 2\cos 2a + \cos 4a}$$

$$\operatorname{ctg} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg} a} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} a - \frac{1}{2}\operatorname{tg} a.$$

3.18. $\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$;

$$\frac{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

3.19. Folosim relația $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + 2\sin x \cos x \sin y \cos y -$$
$$- 2(\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y)(1 - 2\sin^2 x) = \sin^2 x + \sin^2 y +$$
$$+ 2\sin x \sin y(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = \sin^2 x + \sin^2 y +$$
$$+ 2\sin x \sin y \cos(x + y).$$

3.20. Folosim relațiile $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ și avem:

$$2\sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x = 2\sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) =$$
$$= 2\sin 2x \cdot \sqrt{2}\cos(2x - 45°).$$

3.21. Prima relație se scrie succesiv:

$$\frac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\cos^2(a-b)} + \frac{2\cos a \cos b}{\cos(a-b)} = \frac{-\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2(a-b)} + \frac{2\cos a \cos b}{\cos(a-b)} =$$
$$= \frac{-\cos(a+b) + 2\cos a \cos b}{\cos(a-b)} = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)} = 1.$$

A doua relație devine

$$\frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin^2(a-b)} - \frac{2\sin a \cos b}{\sin(a-b)} = \frac{-\sin(a-b)\sin(a+b)}{\sin^2(a-b)} - \frac{2\sin a \cos b}{\sin(a-b)} =$$
$$= \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = 1.$$

3.22. Ținem seama că:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\frac{\cos 3x + 9}{2\cos x + 3} = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x + 9}{2\cos x + 3} = 2\cos^2 x - 3\cos x + 3.$$
$$\cos 2x - 3\cos x + 4 = 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 4 = 2\cos^2 x - 3\cos x + 3.$$

3.23. Dezvoltînd se verifică egalitățile.

3.25. $\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1.$

$$E = \frac{\cos^2 2a - 2\cos^2 a + 1}{\cos^2 2a + 2\cos^2 a + 1} = \left(\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}\right)^2 = \text{tg}^4 a.$$

3.27. $\text{tg}\, 2a = \frac{2\,\text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a} = \frac{8}{15} + 0 < a < 45°$ deoarece

$$\text{tg}\, a = \frac{1}{4}; \text{ rezultă și } 0 < 2b < 45°.$$

$$\text{tg}(2a + b) = 1 = \frac{\text{tg}\, 2a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, 2a\, \text{tg}\, b} = \frac{\frac{8}{15} + \text{tg}\, b}{1 - \frac{8}{15}\text{tg}\, b},$$

$$\text{tg}\, b\left(1 + \frac{8}{15}\right) = 1 - \frac{8}{15}; \quad \text{tg}\, b = \frac{7}{23}, \text{ deci } b = \text{arc tg}\, \frac{7}{23}.$$

3.28. Aducem la același numitor:

$$\frac{\sin 15^\circ \cos 5^\circ - \cos 15^\circ \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin (15^\circ - 5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 10^\circ} = 2;$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{4 \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

3.29. Avem $m + n = \frac{\sin (x+z)}{\sin (y-z)} + \frac{\cos (x-z)}{\cos (y+z)} =$

$$= \frac{\sin (x+z) \cos (y+z) + (y-z) \cos (y-z)}{\cos (y+z) \sin (y-z)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[\sin (x+y+2z) + \sin (x-y)] + \frac{1}{2}[\sin (x+y-2z) - \sin (x-y)]}{\sin (y-z) \cos (y+z)} =$$

$$= \frac{\sin (x+y) \cos 2z}{\sin (y-z) \cos (y+z)}.$$

La fel obținem $1 + m = \frac{\sin (x+y) \cos (x-y)}{\sin (y-z) \cos (y+z)}$.

Prin împărțire obținem relația cerută.

3.30. $\sin x \mid \cos y \mid - \sin y \mid \cos x \mid = -1$, $\sin x < 0$ și $\sin y > 0$

Rezultă $(x-y) = 360^\circ k - 90^\circ$; $x = 360^\circ k - 90^\circ + y$, deoarece $\sin (360^\circ k - 90^\circ + y) < 0$ rezultă:

$$360^\circ k_1 - 90^\circ < y < 360^\circ k_1 + 90^\circ, \text{ însă } \sin y > 0,$$

prin urmare $360^\circ k_1 < y < 360^\circ k_1 + 90^\circ$, unde:

$x = 360^\circ k - 90^\circ - y$ sau $360^\circ k_2 - 90^\circ < x < 360^\circ k_2$, ($k$, k_1, k_2 întregi).

Caz particular $0 < y < 90^\circ$ și $x = 270^\circ + y$.

3.31. Obținem $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ sau

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)\left(1 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\right) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \cdot \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 0$$

de unde: 1°) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$, deci $x + y = k\pi$

2°) $\operatorname{tg} x = 0$, adică $x = k\pi$, y oarecare

și 3°) $\operatorname{tg} y = 0$, unde $y = k\pi$ și x oarecare (k întreg).

3.32. Prima identitate are loc în cadranul I, a doua în cadranul al II-lea, a treia în cadranul al III-lea și a patra în al IV-lea cadran.

3.34. Deoarece radicalii sînt asimetrici, singura posibilitate este ca $\sin x = -\sin y$, adică $\sin x + \sin y = 0$, deci: $x + y = 2k\pi$ sau $x - y = (2k+1)\pi$.

3.36. Prima identitate are loc dacă $0 + 2k\pi < 4x < \pi + 2k\pi$ sau $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, k întreg și obținem:

$$x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

A doua identitate are loc dacă:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 6x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ sau}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \text{ de unde:}$$

$$x_2 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{21\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right)$$

$$x = x_1 \cap x_2 = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{6\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{18\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right).$$

3.39. $E = (1 - 4\sin^2 a)\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}^3 a}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2 a} - \mathrm{tg}\,a\right) - \sin 2a\,\mathrm{tg}^2 a =$

$$= 2(1 - 4\sin^2 a)\frac{\mathrm{tg}^3 a + \mathrm{tg}\,a}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2 a} - \sin 2a\,\mathrm{tg}^2 a =$$

$$= 2(1 - 4\sin^2 a)\cdot\frac{\sin a\,(\sin^2 a + \cos^2 a)}{\cos^2 a\,(1 - 4\sin^2 a)} - \sin 2a\,\mathrm{tg}^2 a =$$

$$= 2\frac{\sin a}{\cos a} - \sin 2a\cdot\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \sin 2a\cdot$$

$$\cdot\frac{1 - \sin^2 a}{\cos^2 a} = \sin 2a.$$

3.40. *Soluția I.* $\frac{1}{2\sin 10°} = \frac{\sin 30°}{\sin 10°} = \frac{3\sin 10° - 4\sin^3 10°}{\sin 10°} = 3 - 4\sin^2 10° =$

$$= -1 + 4\cos^2 10° = 1 + 2\cos 20°;\ \sin 70° = \cos 20°.$$

Expresia devine $1 + 2\cos 20° - 2\cos 20° = 1$.

Soluția II. Înlocuim în identitatea:

$$2\sin x\cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y).$$

pe $x = 10°$ și $y = 20°$ și obținem $2\cos 20°\sin 10° = \sin 30 - \sin 10°$,

de unde $\frac{1}{2\sin 10°} = 1 + 2\cos 20°$; $\sin 70° = \cos 20°$.

3.41. $\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos x = \dfrac{1-2}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$.

$$\sin y = \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos y = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin(x-y) = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6};\quad \cos(x+y) = \frac{1-2\sqrt{6}}{6};$$

$$\mathrm{tg}\,(x+y) = \frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{23}.$$

3.42. $\sqrt{1+\sin 20^\circ} = \sqrt{(\sin 10 + \cos 10)^2} = \sin 10^\circ + \cos 10^\circ.$

$$\sqrt{1-\sin 20^\circ} = \cos 10^\circ - \sin 10^\circ.$$

3.43. $\dfrac{\sin^2 45^\circ - \sin 27^\circ \sin 63^\circ}{\sin 18^\circ \sin 72^\circ} = \dfrac{\sin^2 45^\circ - \sin 27^\circ \cos 27^\circ}{\sin 18^\circ \sin 72^\circ} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 54^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 72^\circ} =$

$$= \frac{\sin^2 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \mathrm{ctg}\,72^\circ.$$

3.44. $\sin 24^\circ = 2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ$, $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$.

Relaţia devine $2\sin(12^\circ + 18^\circ) = 1$; sau $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

3.45. $\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) = \dfrac{1}{2}[1 - \cos(2x+2y) + 1 - \cos(2x -$

$$- 2y)] = 1 - \cos 2x \cos 2y.$$

$$\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) = 1 + \cos 2x \cos 2y.$$

Prin înmuţire obţinem relaţia cerută.

3.50. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, deci fracţia devine:

$$\frac{8\cos^3 x - 4\cos x - 1}{4\cos^2 x - 2\cos x - 1} = 2\cos x + 1.$$

3.52. Avem:

$\sin 4x + 2\sin 2x = 2\sin 2x \cos 2x + 2\sin 2x = 2\sin 2x(\cos 2x +$

$$+ 1) = 4\sin 2x \cos^2 x.$$

$$-\sin 4x + 2\sin 2x = 2\sin 2x(1 - \cos 2x) = 4\sin 2x \sin^2 x.$$



3.59. $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}$ sau $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} c}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} b}$; de unde:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\dfrac{\sin(a+c)}{\cos a\cos c}}=\frac{\operatorname{tg} c}{\dfrac{\sin(b+c)}{\cos b\cos c}} \text{ sau } \frac{\sin(a+c)}{\sin(b+c)}=\frac{\sin a}{\operatorname{tg} c\cos b}. \quad (1)$$

$$\text{Din } \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} \text{ rezultă } \frac{\sin(a+c)}{\sin(b+c)}=\frac{\cos a\operatorname{tg} c}{\sin b}. \quad (2)$$

Înmulțind (1) cu (2), obținem relația din enunț.

3.67. Notăm $\operatorname{tg} x=t$ și obținem identitatea algebrică cunoscută:

$$\frac{t-1}{t+1}+\frac{t^2-1}{t^3+1}+\frac{t^3-1}{t^3+1}=\frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{t^3-1}{t^3+1},$$

care se verifică.

3.68. Folosim relațiile $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin^2 x=1-\cos^2 x$.

$$\frac{2\cos 3x+2\cos x-1}{4\sin^2 x+2\cos x-3}=\frac{8\cos^3 x-4\cos x-1}{-4\cos^2 x+2\cos x+1}=-2\cos x-1.$$

$$4\sin\left(60°-\frac{x}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{x}{2}\right)=4\cos\left(30°+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-30°\right)=$$

$$=2(\cos 60°+\cos x)=2\cos x+1.$$

3.80. $\operatorname{tg} a+\operatorname{ctg} a=\frac{2}{\sin 2a}$; $\operatorname{tg} a-\operatorname{ctg} a=-\operatorname{ctg} 2a$.

$$E=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}-2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\sin\frac{\pi}{12}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1;$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

$$E=2\left[2-(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]=2\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}-1\right).$$

3.81. $\operatorname{ctg} x=\frac{2}{a\pm\sqrt{a^2-4}}=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}$, unde $|a|>2$,

de unde rezultă $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=a$.

$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^3-3(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x=a^3-3a.$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}=a.$$

$$\text{deci } \sin 2x=\frac{2}{a};\ \cos 4x=1-2\sin^2 2x=1-\frac{8}{a^2}.$$

Prin urmare:

$$E = a^3 - 3a + \frac{2}{a} + 1 - \frac{8}{a^2} = \frac{a^5 - 3a^3 + a^2 + 2a - 8}{a^2}.$$

3.82. $$\frac{2 \sin a \cos a}{2 \cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

3.83. Se pot folosi relațiile:

Metoda 1. $\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| = \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$; $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$.

Metoda 2. Se consideră x în fiecare din cele 4 cadrane și se scot expresiile de sub modul, ajungînd în fiecare caz la partea a doua a identității.

3.85. Ordonăm după puterile lui $\cos a$.

$$\cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b + \cos^2 c - 1 = 0$$

$$\Delta' = \sin^2 b \sin^2 c > 0.$$

$$\cos a = \cos b \cos c \pm \sin b \sin c = \cos (b \mp c).$$

3.86. Se dezvoltă $\sin (\alpha + \beta + \gamma)$, se dă factor comun $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, apoi se fac simplificările care apar și se obține:

$$S = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

3.94. a) $(1 + \cos x) > 0$; $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} > 0$,

dacă $\sin x < 0$, atunci și $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} < 0$.

Partea I și partea II a primei egalități au același semn. Ridicăm la pătrat:

$$(1 + \cos^2 x + 2 \cos x)(2 - 2 \cos x) = (1 - \cos^2 x)(2 + 2 \cos x),$$

relație care este verificată.

b) Avem $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$, deci $1 + \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}^2 x$.

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

3.95. Se folosește identitatea $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$, adică:

$$\frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k-1}}.$$

Dăm lui k valorile 1, 2, 3 ...n și se adună.

3.96. Ținem seama că:

$$\sqrt{1 \pm \sin x} = \left|\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2}\right| \text{ și că pentru:}$$

$$x \in [0{,}90°] \cup [270°,\ 450°] \cup [640°,\ 810°],\ \left|\cos\frac{x}{2}\right| \geqslant \left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

obținem $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, iar pe restul intervalelor

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant \left|\sin\frac{x}{2}\right| \text{ și rezultă } y = \operatorname{ctg} x.$$

3.97. Se ține seama de valorile lui $\sin x$ și $\cos x$ în fiecare cadran.

3.99. Numărătorul ia respectiv valorile 0, $\sin 2x$, 0, $-\sin 2x$, iar numitorul ia valorile 1, $-\cos 2x$, -1, $\cos 2x$.

Raportul lor dă valorile cerute.

3.105. $T_n = (\sin^{2n} x + \cos^{2n} x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = T_{n+1} + \sin^2 x \cos^2 x\, T_{n-1}$.

Analog avem:

$T_{n-1} = T_n + \sin^2 x \cos^2 x\, T_{n-2};$

$T_{n-2} = T_{n-1} + \sin^2 x \cos {}^2x\, T_{n-3};$

. . . .

$T_2 = T_3 + \sin^2 x \cos^2 x\, T_1;$

$T_1 = T_2 + \sin^2 x \cos^2 x\, T_0.$

Prin adunare obținem relația cerută,

3.106. Relațiile se mai scriu:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = a;\ \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = b, \text{ de unde:}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{1 - a} \text{ și } \operatorname{tg} 2x = \frac{b}{1 - b}.$$

Relația

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \text{ ne dă eliminarea lui } x,$$

$$b = \frac{2a(1 - a)}{1 - 2a^2}.$$

3.107. Avem $\frac{x}{a} = \cos\alpha \cos 3\alpha$ și $\frac{y}{b} = \sin\alpha \sin 3\alpha$.

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \cos 4\alpha\ ;\ \frac{a}{a} + \frac{y}{b} = \cos 2\alpha.$$

Ținînd seama de relația $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$,

avem:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - 1.$$

3.111. Se aplică tangenta în ecuația a treia; se exprimă ctg în funcție de tg și se va obține ținînd seama și de prima ecuație:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \operatorname{ctg} c.$$

3.112. Din relațiile date obținem:

$$\cos x \sin (a - 3x) + \sin x \cos (a - 3x) = b \sin x \cos x,$$

$$\cos x \sin (a - 3x) - \sin x \cos (a - 3x) = b \sin x \cos x \cos 2x,$$

de unde:

$$\sin (a - 2x) = \frac{b \sin 2x}{2}; \sin (a - 4x) = \frac{-b \sin 4x}{4}.$$

Dezvoltînd sinusurile obținem

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \sin x}{b + 2\cos x}; \operatorname{tg} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{4 \sin a}{4 \cos a - b}.$$

$$\frac{4 \sin a}{4 \cos a - b} = \frac{4 \sin a (b + 2\cos a)}{b^2 + 2\cos a + 4 \cos 2a} \text{ și apoi}$$

$$b (b + \cos a) = 2.$$

3.113. Fie triunghiul ABC dreptunghic în C și O un punct situat pe cateta AC. Se duce OP perpendiculară pe AB. Dacă notăm $\sphericalangle OAB = a$ și $\sphericalangle OBA = b$, atunci $\sphericalangle BOC = a+b$.

Scriind aria triunghiului OAB sub două forme diferite, avem:

$OA \cdot BC = AB \cdot OP$, de unde:

$$\frac{BC}{OB} = \frac{OP}{OA} \cdot \frac{PB}{OB} + \frac{AP}{OA} \cdot \frac{OP}{OB},$$

adică tocmai relația cerută.

Triunghiurile asemenea AOP și ABC dau succesiv: $AO \cdot AC = AP \cdot AB$; $AO \cdot OC = AP \cdot BP - OP^2$:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{AP}{OA} \cdot \frac{PB}{OB} - \frac{OP}{AO} \cdot \frac{OP}{OB}, \ldots$$

3.114. Formulele $AO \cdot BC = AB \cdot OP$ și $AO \cdot OC = AP \cdot PB - OP^2$ de la exercițiul precedent dau:

$$\frac{BC}{OC} = \frac{AP \cdot OP}{AP \cdot PB - OP^2} = \left(\frac{OP}{AP} + \frac{OP}{PB}\right) : \left(1 - \frac{OP}{AP} \cdot \frac{OP}{PB}\right), \ldots$$

3.115. Fie triunghiul dreptunghic în O şi $\sphericalangle\, OAB = a$; fie M mijlocul lui AB şi OH perpendiculară pe AB. Dacă $OH = 1$ avem $HA = \operatorname{ctg} a$; $HB = \operatorname{tg} a$; $HM = \operatorname{ctg} 2a$; dar $HA - HB = 2HM$ ş. a. m. d.

3.116. Pe cercul de rază 1, de o parte si de alta a originii M luăm arcele $MA = MB = a$; atunci $\sin 2a$ este îndoitul ariei aceluiaşi triunghi luînd ca bază pe $AB = 2\sin a$ (G.M. VI).

3.117. (v. exerciţiul precedent). Coarda AB taie raza OM în P, iar cercul descris pe AB cu diametru taie pe OB în N şi pe OM în Q şi S. Avem : $ON \cdot OB = OQ \cdot OS = (OP - PQ)\ (OP + PS)$, adică: $\cos 2a = (\cos a - \sin a)\ (\cos a + \sin a) = \cos^2 a - \sin^2 a$. (G.M.VI).

3.118. În cercul de rază 1 luăm de o parte şi de alta a originii M arcele $MA = MA' = a$. $MB = MB' = b (b < a)$; proiectăm punctele A şi A' în P şi P' pe raza OB' şi fie C şi D intersecţiile razei OM în coardele AA' şi BB'.

Exprimăm apoi că suma ariilor triunghiurilor OAB' şi $OA'B'$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor OAA' şi $B'AA'$.

Avem:

$$OB'\ (AP' + A'P') = 2AC\ \ (OC + CD), \text{ adică formula cerută.}$$

3.119. Din origina M a arcelor luăm arcele $MA = a$ şi $AB = b$ şi se presupune că $a + b < 180°$. Avem apoi: aria OMA + aria OAB = aria OMB + aria MAB, dar aria $OMA = \frac{1}{2} \sin a$; aria $OAB = \frac{1}{2} \sin b$; aria $OMB = \frac{1}{2} \sin \frac{a+b}{2}$; aria $MAB = \frac{1}{2}\ MA \cdot AB.\ \sin \frac{2\pi - a - b}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2}.\ 2 \sin \frac{b}{2}.\ \sin \frac{a+b}{2}$.

Demonstraţie analogă dacă $a+b > 180°$ (G.M.VI).

3.120. Se notează cu O centrul cercului şi cu P mijlocul coardei AB.

Avem:

$$\sin AMB = \sin AOP = \frac{AB}{AO} = \frac{2AP}{2OA} = AB.$$

3.121. Se va arăta că F este ortocentrul triunghiului ACD, iar H este ortocentrul triunghiului ABC.

Însemnînd respectiv cu a şi b unghiurile CAD şi BAC, avem :

$$CD = \sin a;\ BC = \sin b;\ BE = BC \cos a = \sin b \cos a.$$

Analog $DE = DC \cos b = \sin a \cos b$; $BD = \sin (a + b)$; $DF = \sin (a - b)$. Rezultă $\sin (a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

3.122. În cercul cu diametrul 1 se iau unul după altul arcele AB, BC, CD, respectiv egale cu $2a$, $2b$, $2c$. Se va ţine seama apoi de exerciţiul precedent şi se va aplica patrulaterului inscriptibil $ABCD$ formula lui Ptolomeu.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

3.123. Fie triunghiul dreptunghic ABC, în care notăm $\sphericalangle C=a$, iar CD bisectoarea exterioară a unghiului C. Avem:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD} \text{ sau } \frac{BC-AC}{AC}=\frac{BD-AD}{AD};\ \frac{BC}{AC}=\sec a$$

$$\frac{BC-AC}{AC}=\sec a-1;\ \frac{BD-AD}{AD}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{AC}:\frac{AD}{AC}=$$

$$=\operatorname{tg} a:\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=\operatorname{tg} a:\operatorname{ctg}\frac{a}{2}.$$

3.124. $AM=AA'\sec\frac{A}{2}$, dar $AA'=\frac{2AB\cdot AC}{AB+AC}\cos\frac{A}{2}$, de unde relaţia din enunţ.

3.125. Obţinem $\sin B\cdot\sin C\,(\sin 2B-\sin 2C)=0$, de unde $\sin 2B-\sin 2C=0$, deci:

$$2B=2C \text{ sau } 2B=\pi-2C \text{ etc.}$$

3.126. Fie arcul AB egal cu x, M mijlocul cercului AB şi M' mijlocul coardei AB. Raza este unitatea.

Expresia $x-\sin x$ este dublul ariei segmentului de cerc $AMBA$, care arie este mai mică decît aria dreptunghiului construit pe AB şi cu înălţimea MM', deci:

$$x-\sin x<4AM'\cdot MM'=4\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=8\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4},$$

cu atît mai mult:

$$x-\sin x<8\,\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{16}, \text{ adică } x-\sin x<\frac{x^3}{4}.$$

3.127. Relaţia se poate scrie:

$$\sin(B+C)-2\sin B\cdot\sin C=0, \text{ ceea ce duce la } B=C.$$

3.128. Fie x cateta comună. Cea mai mică catetă din triunghiul dreptunghic mic este $x\operatorname{tg}15^\circ$, iar cateta cea mai mare din triunghiul dreptunghic cel mare este $x\operatorname{ctg}15^\circ$.

Revine a arăta că $2x^2$ este suma ariilor celor două triunghiuri dreptunghice. Ipotenuzele lor sînt catetele triunghiului dreptunghic format din alăturarea celor două triunghiuri considerate şi care are ca înălţime chiar cateta x. Catetele triunghiului format sînt $\sqrt{x^2+x^2\operatorname{tg}^2 15^\circ}=x\sec 15^\circ$ şi $\sqrt{x^2+x^2\operatorname{ctg} 15^\circ}=x\operatorname{cosec}15^\circ$. Acum rămîne de arătat că:

$$\frac{1}{2}x\sec 15^\circ\cdot x\operatorname{cosec}15^\circ=2x^2 \text{ sau } \frac{1}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{1}{4},$$

ceea ce este adevărat, deoarece $\sin 30^\circ=2\sin 15^\circ\cos 15=\frac{1}{2}$.

Observare. Mai putem scrie aria dreptunghiului format astfel:

$$\frac{1}{2}\,x\,(x\,\mathrm{tg}\,15^\circ + x\,\mathrm{ctg}\,15^\circ) = 2x^2.$$

Obținem $\mathrm{tg}\,15^\circ + \mathrm{ctg}\,15^\circ = 4.$

3.129. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geqslant \frac{1}{2}.$

3.130. $\mathrm{ctg}\,a = y$; $\mathrm{ctg}\,2a = \frac{y^2-1}{2y}$ sau $\frac{(y-1)^2}{2y} > 0$; $y > 0$, $\mathrm{ctg}\,a > 0$,

$$0 < a < 90^\circ.$$

3.131. Notăm $\cos x = y$. Inecuația devine:

$$f(y) = \frac{-y\,(4y+3)}{(2y-1)\,(4y-1)} \geqslant 0.$$

Semnele funcției $f(x)$ pe intervale ne dă:

$$y \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ sau}$$

$$-\frac{3}{4} \leqslant \cos x \leqslant 0 \text{ și } \frac{1}{4} < \cos x < \frac{1}{2}.$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{3}, \arccos\frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right] \cup$$

$$\cup \left[2\pi - \arccos\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)\right] \cup \left(2\pi - \arccos\frac{1}{4}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

3.132. $4\sin^2 30x - 1 < 0$; $|\sin 30x| < \frac{1}{2}$

$$30x \in (180k - 30^\circ, 180k + 30^\circ)$$

sau

$$x \in (6k - 1^\circ, 6k + 1^\circ),$$

deci:

$$x \in (-1^\circ, 1^\circ) \cup (5^\circ, 7^\circ) \cup (11^\circ, 13^\circ) \cup (17^\circ, 19^\circ) \cup (23^\circ, 25^\circ) \cup (29^\circ, 31^\circ).$$

3.133. Inecuația se mai scrie:

$2\sin x\cos x < \cos x$ sau $\cos x\,(2\sin x - 1) < 0$. $\cos x = 0$ ne dă $x = 90^\circ$ și $x = 270^\circ$, iar $2\sin x - 1 = 0$, ne dă $x = 30^\circ$ și $x = 150^\circ$. Rezultă:

$$x \in (0^\circ, 30^\circ) \cup (90^\circ, 150^\circ) \cup (270^\circ, 360^\circ).$$

3.134. Se dau factori comuni prin grupare de termeni și inecuația se reduce la: $\sin x + \frac{1}{2} > 0$, care este verificată pentru

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

3.137. Se folosesc formulele:

$$1+\sec 2a=\frac{\operatorname{tg} 2a}{\operatorname{tg} a},\quad 1+\sec 4a=\frac{\operatorname{tg} 4a}{\operatorname{tg} 2a}\ \ldots$$

3.142. Folosim relațiile $\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$4\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2-4\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^4=4\sin^2 x-4\sin^4 x=$$

$$=4\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)=4\sin^2 x\cos^2 x=\sin^2 2x.$$

3.146. Fie α jumătatea arcului subîntins de latura poligonului $a=\cos\alpha$; $a_2=\cos 2\alpha$, $a_3=\cos 3\alpha$, $a_4=\cos 4\alpha$ și $a_5=\cos 5\alpha$ și $5\alpha<\frac{\pi}{2}$, fiindcă $n>10$. Relația devine:

$$\cos 5\alpha+\cos 4\alpha-2\cos 2\alpha\,(\cos 2\alpha+\cos 3\alpha)+\cos\alpha+1=0.$$

Pentru verificare înlocuim $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\ \cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

și

$$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$$

3.147. Se pleacă de la formula $\cos a=\dfrac{\sin 2a}{2\sin a}$ și astfel

vom mai avea $\cos 2b=\dfrac{\sin 4a}{2\sin 2a},\ldots$

Facem produsul și obținem:

$$P_1=\frac{\sin 2^{n+1}a}{2^{n+1}\sin a}.$$

Înlocuind pe a prin $\dfrac{a}{2^n}$, obținem $P_2=\dfrac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\dfrac{a}{2^n}}$.

3.148. $\sqrt{2+2\cos a}=\sqrt{2(1+\cos a)}=2\cos\dfrac{a}{2}.$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}=\sqrt{2+2\cos\frac{a}{2}}=2\cos\frac{a}{4}.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{a}{4}}=2\cos\frac{a}{8}.$$

$$E = 8\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8} = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cdot 2\cos\frac{a}{4}\sin\frac{a}{4}}{\sin\frac{a}{8}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{8}} = \frac{\sin a}{\sin\frac{a}{8}}.$$

3.149. Avem:

$$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) = 2\,\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right).$$

$$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) = 2\,\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2a\right) = 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right).$$

$$2\,\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right) - 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right) = 4\,\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 4a\right) = 4\,\text{tg}\,4a.$$

4.1. *Soluția I.* Prima fracție se mai scrie:

$$\frac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{2\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{4\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}{2\sin(A+B)\cos(A-B)}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(A-B).$$

Soluția II. $\dfrac{\sin^2 A - {}^2B}{\sin 2A+\sin 2B}=\dfrac{\dfrac{1-\cos 2A}{2}-\dfrac{1-\cos 2B}{2}}{\sin 2A+\sin 2B}=$

$$=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{4\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{2\sin(A-B)\sin(A+B)}{4\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(A-B).$$

4.2. $2\sin\dfrac{\pi+a}{3}\sin\dfrac{\pi-a}{3}=\cos\dfrac{2a}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\dfrac{2a}{3}+\dfrac{1}{2}$

$$4\sin\frac{a}{3}\sin\frac{\pi+a}{3}\sin\frac{\pi-a}{3}=2\sin\frac{a}{3}\left(\cos\frac{2a}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{a}{3}\cos\frac{2a}{3}+\sin\frac{a}{3}=\sin a-\sin\frac{a}{3}+\sin\frac{a}{3}=\sin a.$$

4.3. Transformînd în produs:

$$\sin z\sin(x+y-z)=\frac{1}{2}[\cos(x+y-2z)-\cos(x+y)],$$

$$\sin(x-z)\sin(y-z)=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y-2z)],$$

de unde:

$$\cos(x+y)+2\sin x\sin y=\cos(x-y),\ \text{evidentă.}$$

4.4. $E=2\sin^2 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\left(\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 2x=$

$$=2\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{3}\right)\sin 2x=8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin x\cos x.$$

4.5. $\sin(mx+x)+\sin(mx-x)=2\sin mx\cos x$,

$\cos(mx+x)+\cos(mx-x)=2\cos mx\cos x$,

care sînt relaţii evidente.

4.6. Se descompune membru întîi în factori şi apoi se transformă sumele şi diferenţele de funcţii trigonometrice în produse.

4.7. Se descompune în factori membru întîi şi apoi se transformă sumele şi diferenţele de funcţii trigonometrice în produse.

4.8. În membrul întîi facem să fie o aceeaşi funcţie trigonometrică, ca să se poată apoi aplica transformarea în produse.

4.9. Se transformă în produse şi se obţine $-\dfrac{\sin x}{\sin 5x}$.

4.10. $\operatorname{tg} 66° - \operatorname{tg} 36° = \dfrac{\sin 30°}{\cos 66° \cos 36°}$; $\operatorname{tg} 36° - \operatorname{tg} 6° = \dfrac{\sin 30°}{\cos 36° \cos 6°}$,

de unde rezultă relaţia cerută.

4.11. $E=(\sin 5a-\sin a)-\sin(4a-\sin 2a)=$

$=2\sin 2a\cos 3a-2\sin a\cos 3a=$

$=2\cos 3a(\sin 2a-\sin a)=2\cos 3a\sin a(2\cos 2a-1)=$

$=\dfrac{2\cos 3a\sin a(4\cos^2 a-1)}{1+2\cos a}=\dfrac{2\cos 3a\sin 3a}{1+2\cos a}=\dfrac{\sin 6a}{1+2\cos a}$.

4.12. $\operatorname{ctg} a$.

4.13. Se ţine seama ca $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ şi se obţine:

$$E=\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

4.15. Se ţine seama că $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ şi $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

4.17. Se foloseşte asocierea şi se aplică formulele de transformare în produs la $(\sin 2x+\sin 10°)$; se dau factori comuni; se ţine seama de $\sin(a+b)$ şi se obţine:

$$E=6\sin 6x\cos 4x.$$

4.18. Se va ţine seama că $1=\sin^2 a+\cos^2 a$.

4.19. $E=\dfrac{(\sin 7x+\sin 4x)(\sin 7x-\sin 4x)}{(\cos 5x+\cos 6x)(\cos 5x-\cos 6x}=$

$$=\frac{\sin\frac{11x}{2}\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{11x}{2}}{\cos\frac{11x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{\sin x(3-4\sin^2 x)}{\sin x}=$$

$=3-4\sin^2 x=3-4+4\cos^2 x=4\cos^2 x-1=2\cos 2x+1$.

4.20. Se transformă produsele în sume

4.21. Se dă b factor comun; se aduc fracțiile la același numitor; se substituie $\frac{a}{b} = \text{tg } \varphi$ și se obține:

$$E = \frac{2 \text{ tg } \varphi}{\sin (x - \varphi) \sin (x + \varphi)}.$$

4.22. $E = \frac{2 \cos (a + b) \cos c}{2 \cos c \cos (a - b)} + \frac{2 \sin (a + b) \cos c}{2 \sin (a - b) \cos c} =$

$$= \frac{\cos (a + b)}{\cos (a - b)} + \frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)} = \frac{\sin 2a}{\sin (a - b) \cos (a - b)} = \frac{2 \sin 2a}{\sin 2 (a - b)}.$$

4.23. Prima parte se mai poate scrie succesiv:

$$2 \cos \frac{3(a + b)}{2} \cos \frac{b - a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a - b}{2} - 1 =$$

$$= 2 \cos \frac{a - b}{2} \left[\cos^3 \frac{(a + b)}{2} + \cos \frac{a - b}{2}\right] - 1 =$$

$$= 4 \cos \frac{a - b}{2} \cos \frac{2 a + b}{2} \cos \frac{a + 2 b}{2} - 1.$$

4.24. Avem succesiv:

$$[\cos (a + b) + \cos (a - b)]^2 = (2 \cos a \cos b)^2 = 2 \cos^2 a . 2 \cos^2 b =$$

$$= (1 + \cos 2a) (1 + \cos 2b) = 4 \cos^2 a \cos^2 b.$$

Relația a doua se deduce din prima, înlocuind pe a prin $\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ și b prin $\left(\frac{\pi}{4} - b\right)$.

4.25. Dezvoltăm partea I.

$$\sin^2 a \cos x + \sin a \cos a \sin x - \sin^2 b \cos x - \sin b \cos b \sin x =$$

$$= \cos x (\sin a + \sin b) (\sin a - \sin b) + \sin x . \frac{1}{2} (\sin 2a - \sin 2b) =$$

$$= 4 \cos x \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2} \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{(a + b)}{2} +$$

$$+ \sin x \sin (a - b) \cos (a + b). \text{ Deci}$$

$$\cos x \sin (a + b) \sin (a - b) + \sin x \sin (a - b) \cos (a + b) =$$

$$= \sin (a - b) \sin (a + b + x).$$

4.26. Numărătorul expresiei devine $(a^2 - b^2) \sin 2x$

Notăm $\frac{1}{a} = \text{ctg } \varphi =$ și avem:

$$(a^2 - b^2) \sin 2x = \frac{- a^2 \sin 2x \cos 2 \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Numitorul devine:

$$a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x = a^2 \left(\cos^2 x - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 x\right) =$$

$$= \frac{a^2}{\sin^2 \varphi} (\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x)(\sin \varphi \cos x - \cos \varphi \sin x) =$$

$$= \frac{a^2}{\sin^2 \varphi} \sin(\varphi + x) \sin(\varphi - x), \text{ deci:}$$

$$E = \frac{\sin 2x \cos 2\varphi}{\sin(x+\varphi) \sin(x-\varphi)}.$$

4.27. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$;

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c.$$

Prima parte se mai scrie:

$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin(a+b)\cos c - \sin c\,[\cos(a+b) - 1] =$$

$$= 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \cos c + 2 \sin c \sin^2 \frac{a+b}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2}\left[\cos \frac{a-b}{2} - \cos\left(\frac{a+b}{2} + c\right)\right] = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{a+c}{2}.$$

4.28. Se calculează $\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c] = \ldots$

$= \Sigma \sin a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c$.

Pentru $\sin(a+b-c)$ se înlocuieşte în formula precedentă c prin $-c$. Idem pentru celelalte funcţii. Rezultă relaţiile cerute.

4.29. Partea întîia a primei identităţi se scrie:

$$2 \sin\left(A + \frac{B+C}{2}\right) \cos \frac{B-C}{2} + 2 \sin(A+D) \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\left[\sin\left(A + \frac{B+C}{2}\right) + \sin\left(A + D + \frac{B+C}{2}\right)\right] +$$

$$-4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\left[\sin\left(A + \frac{B+C}{2}\right) - \sin\left(A + \frac{B+C}{2}\right)\right] =$$

$$= 4 \sin\left(A + \frac{B+C+D}{2}\right) \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} -$$

$$-4 \cos\left(A + \frac{B+C+D}{2}\right) \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}.$$

În cazul $A + B + C = \pi$, $\sphericalangle D = 0$, obţinem:

$$\Sigma \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

4.30. În problema 4.29 se înlocuieşte A prin $(A+90°)$ şi se obţine relaţia cerută, sau se obţine în mod analog prin transformări în produse, ca pentru relaţia amintită.

4.31. Transformăm produsele în sume şi avem:

$$\cos a_1 \cos (a_1 + a_2 + b_2) - \cos b_1 \cos (b_1 + a_2 + b_2) =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos (2a_1 + a_2 + b_2) + \cos (a_2 + b_2) - \cos (2b_1 + a_2 + b_2) - \cos (a_2 + b_2)].$$

$$\cos (a_1 + a_2) \cos (a_1 + b_2) \cdot \cos (b_1 + b_2) \cos (b_1 + a_2) =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos (2a_1 + a_2 + b_2) + \cos (a_2 - b_2) - \cos (2b_1 + a_2 + b_2) - \cos (a_2 - b_2)].$$

4.32. $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3 \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) - 3 \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \operatorname{tg} 3x \frac{-\sin x \sin 2x - 2 \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} =$$

$$= -\operatorname{tg} 3x \frac{(\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x) + \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} =$$

$$= -\operatorname{tg} 3x \frac{\cos x + \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} = -\operatorname{tg} 3x \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} = -\frac{2 \cos^2 x \operatorname{ctg} 3x}{\cos 2x}.$$

4.33. Prima parte devine:

$$2 \frac{\frac{\sin 2(a+b)}{\cos 2a \cos 2b} - \frac{\sin 2(a+b)}{\sin 2a \sin 2b}}{\frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b} - \frac{\sin (a+b)}{\sin a \sin b}} =$$

$$= 2 \frac{\sin 2(a+b) \cdot [-\cos 2(a+b)]}{\sin (a+b) \cdot [-\cos (a+b)]} \cdot \frac{\cos a \cos b \sin a \sin b}{\cos 2a \cos 2b \sin 2a \sin 2b} =$$

$$= \frac{\sin 2(a+b) \cos 2(a+b)}{\sin 2(a+b)} \cdot \frac{\sin 2a \sin 2b}{\sin 2a \cos 2b \sin 2b \cos 2a} = \frac{\cos 2(a+b)}{\cos 2a \cos 2b} =$$

$$= \frac{\cos 2a \cos 2b - \sin 2a \sin 2b}{\cos 2a \cos 2b} = 1 - 2 \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 2b.$$

4.34. Expresia se mai scrie:

$$\frac{-2 \sin 3a \sin a + \sin 3a}{2 \cos 3a \sin a - \cos 3a} + \operatorname{tg} 3a = \frac{\sin 3a (1 - 2 \sin a)}{\cos 3a (2 \sin a - 1)} + \operatorname{tg} 3a = 0.$$

4.35. Ţinem seama că:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b} \text{ şi } \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b = \frac{\sin (a+b)}{\sin a \sin b}, \text{ obţinem}$$

$$E = 2\frac{\dfrac{\sin 2(a+b)}{\cos 2a \cos 2b}+\dfrac{\sin 2(a+b)}{\sin 2a \sin 2b}}{\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}+\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}} =$$

$$= 2\,\frac{\sin 2(a+b)\cdot\cos 2(a-b)}{\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)}\cdot\frac{\cos a\cos b\sin a\sin b}{\cos 2a\cos 2b\sin 2a\sin 2b} =$$

$$= \frac{\sin 2(a+b)\cos 2(a-b)}{\sin(a+b)\cos(a-b)}\cdot\frac{\sin 2a\,\sin 2b}{\sin 2a\cos 2b\sin 2b\cos 2a} =$$

$$= \frac{\sin 4a+\sin 4b}{(\sin 2a+\sin 2b)\cos 2a\cos 2b}.$$

4.36.
$$E = \frac{\left(\dfrac{\sin a}{\cos a}-\dfrac{\sin 5a}{\cos 5a}\right)-\left(\dfrac{\sin 3a}{\cos 3a}-\dfrac{\sin 7a}{\cos 7a}\right)}{\left(\dfrac{\cos a}{\sin a}-\dfrac{\cos 5a}{\sin 5a}\right)-\left(\dfrac{\cos 3a}{\sin 3a}-\dfrac{\cos 7a}{\sin 7a}\right)} =$$

$$= \frac{\sin 4a(\cos a\cos 5a-\cos 3a\cos 7a)}{\sin 4a(\sin 3a\sin 7a-\sin a\sin 5a)}\cdot \operatorname{tg} a\operatorname{tg} 3a\operatorname{tg} 5a\operatorname{tg} 7a.$$

Mai avem:

$$2\cos a\cos 5a = \cos(a+5a)+\cos(a-5a).$$
$$-2\cos 3a\cos 7a = -\cos(3a+7a)-\cos(3a-7a),$$
$$-2\sin a\sin 5a = -\cos(a-5a)+\cos(a+5a);$$
$$2\sin 3a\sin 7a = \cos(3a-7a)-\cos(3a+7a)$$

$$E = \frac{(\cos 6a-\cos 10a)}{(\cos 6a-\cos 10a)}\cdot\operatorname{tg} a\operatorname{tg} 3a\operatorname{tg} 5a\operatorname{tg} 7a.$$

4.37.
$$\operatorname{tg}\frac{a}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-2\pi}{3}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a}{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{a}{3}}+\frac{\operatorname{tg}\dfrac{a}{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{a}{3}} =$$

$$= \frac{9\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}-3\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{3}}{1-3\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{3}}.$$

Mai ţinem seama că:

$$\operatorname{tg} a = \frac{3\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}-\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{3}}{1-3\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{2}};\quad \text{deci } \operatorname{tg}\frac{a}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-2\pi}{3}=3\operatorname{tg} a.$$

Ridicînd la pătrat şi efectuînd obţinem :

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{a-\pi}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{a-2\pi}{3}=9\operatorname{tg}^2 a+6.$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-2\pi}{3}=3\operatorname{tg} a,\ \text{şi cum}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{3}\operatorname{tg}\frac{a-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{a}{3}\operatorname{tg}\frac{a-2\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{a-\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{a-2\pi}{3}=-3,$$

rezultă relaţia din enunţ.

4.38. $$E=4\left[-2\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\right]\left[-2\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\right]=$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\right)=1.$$

4.39. $$\frac{\operatorname{tg}71^\circ-\operatorname{tg}43^\circ}{\operatorname{tg}43^\circ-\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{\sin 28^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 43^\circ}\cdot\frac{\cos 15^\circ\cos 45^\circ}{\sin 28^\circ}=\frac{\cos 15^\circ}{\cos 71^\circ}.$$

4.40. $$E=\frac{1}{2\sin 15^\circ\cos 12^\circ\sin 30^\circ\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin^2 30^\circ\sin^2 45^\circ}=4\sqrt{2}.$$

4.41. $$\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 9^\circ\sin 27^\circ}-\frac{\sin 18^\circ}{\cos 9^\circ\cos 27^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 18^\circ(\cos 9^\circ\cos 27^\circ-\sin 9^\circ\sin 27^\circ)}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ\sin 27^\circ\cos 27^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=4.$$

4.42. a) $$\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}\right)=\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{24}=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}.$$

b) $$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}+2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=4\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}.$$

4.43. Folosim relaţia $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=2\operatorname{ctg}2x$,

$$E=-2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8}+2a\right)+2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8}-2a\right)-2\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{8}+2a\right)+2\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}-2a\right)=$$

$$=-4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4a\right)+4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-4a\right)=4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-4a\right)-4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-4a\right)=$$

$$=8\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-8a\right)=8\operatorname{tg}8a.$$

4.44. Ţinem seama de relaţiile:

$$\cos\left(\frac{11\pi}{24}-a\right)=\sin\left(\frac{\pi}{24}+a\right);\ \cos\left(\frac{17\pi}{24}-a\right)=-\sin\left(\frac{5\pi}{24}-a\right).$$

Expresia devine succesiv

$$-16\sin\left(\frac{\pi}{24}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}+a\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}-a\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}-a\right)=$$

$$=-4\sin\left(\frac{\pi}{12}+2a\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+2a\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+4a\right)=$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}\cos 4a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4a\right)=-\cos 4a-\sqrt{3}\sin 4a\,.$$

4.45. *Soluția I.*

$$2\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{11\pi}{24}\right)=\cos\frac{10\pi}{24}-\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}.$$

$$2\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\right)=\cos\frac{2\pi}{24}-\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{12}.$$

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{11\pi}{24}\right)=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{10\pi}{24}=\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{12}.$$

Soluția II. Se presupune $k=m4$; $m4\pm 1$; $m4+2$ și în fiecare caz egalitatea este verificată imediat.

4.46. $$\operatorname{tg} 7°30'=\frac{2\sin 37°\,30'\sin 7°30'}{2\sin 37°\,30'\cos 7°30'}=\frac{\cos 30°-\cos 45°}{\sin 30°+\sin 45°}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2.$$

4.47. Prima parte se mai scrie:

$$\frac{(\sin 87°-\sin 13°)-3\sin 37°}{(\cos 87°+\cos 13°)-3\cos 37°}=\frac{2\sin 37°\cos 50°-3\sin 37°}{2\cos 37°\cos 50°-3\cos 37°}=$$

$$=\frac{\sin 37°(2\cos 50°-3)}{\cos 37°(2\cos 50°-3)}=\operatorname{tg} 37°.$$

4.48. $$\frac{5(\sin 5°+\cos 13°)-41\sin 41°}{5(\cos 5°+\sin 13°)-41\cos 41°}=\frac{5(\sin 5°+\sin 77°)-41\sin 41°}{5(\cos 5°+\cos 77°)-41\cos 41°}=$$

$$=\frac{10\sin 41°\cos 36°-41\sin 41°}{10\cos 41°\cos 36°-41\cos 41°}=\frac{\sin 41°\cdot 10\cos(36°-41°)}{\cos 41°\,10\cos(36°-41°)}=\operatorname{tg} 41°.$$

4.49. Tranformăm în sume:

$$2\sin 10(\cos 10°-\cos 60°)=\sin 20°-\sin 10°, \text{ sau}$$

$$2\sin 10^\circ\left(\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\right)=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ-\sin 10^\circ \text{ sau}$$

$$\cos 10^\circ-\frac{1}{2}=\cos 10^\circ-\frac{1}{2}.$$

Pentru a doua egalitate obținem:

$$2\sin 10^\circ(\cos 60^\circ+\cos 10^\circ)=\sin 20^\circ+\sin 10^\circ \text{ sau}$$

$$2\sin 10^\circ\left(\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\right)=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\sin 10^\circ=$$

$$=2\sin 10^\circ\left(\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\right).$$

Observare. Împărțind cele două egalități obținem

$$\operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 35^\circ=\operatorname{tg} 5^\circ.$$

4.50. $(\sin 10^\circ \sin 70^\circ)\sin 50^\circ=\frac{1}{2}(\sin 40^\circ-\sin 10^\circ)\sin 50^\circ=$

$$=\frac{1}{4}\sin 50^\circ(1-2\sin 10^\circ)=\frac{1}{4}(\sin 50^\circ-2\sin 50^\circ\sin 10^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}[\sin 50^\circ+(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)]=\frac{1}{4}(\sin 50^\circ+\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos 60=\frac{1}{8}.$$

4.51. Avem $2(\cos 40^\circ+\cos 20^\circ)=4\cos 30^\circ\cos 10^\circ=$

$=2\sqrt{3}\cos 10^\circ$; $4\sqrt{3}\cos 25^\circ\cos 35^\circ-\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\cos 60^\circ+\cos 10^\circ)-\sqrt{3}=$

$$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos 10^\circ-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

4.52. Se transformă suma în produs și se ține seama că

$$\frac{10\pi}{16}+\frac{6\pi}{16}=\pi.$$

4.53. Se înmulțește partea întîi cu $2\sin\frac{\pi}{7}$ și se transformă produsele în sume.

4.54. Înmulțim cu $\sin\frac{2\pi}{7}$. Relația se mai scrie:

$$\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7} \text{ sau}$$

$$\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7};$$

$$\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}, \text{ evident deoarece}$$

$$\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7} \text{ și } \sin\frac{5\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}.$$

4.55. Avem $2 \sin 2x \cos 2x \cos (x + 30°) \cos (x - 30°) =$

$$= 2 \sin x \cos x \cos 2x \cdot 2 \cos (x + 30°) \cos (x - 30°) =$$

$$= 2 \cos x \cos 2x \sin x\, [\cos (x + 30° + x - 30°) + \cos (x + 30° - x + 30°] =$$

$$= 2 \cos x \cos 2x \sin x \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = \cos x \cos 2x \sin x\, (3 - 4 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x \cos 2x \sin 3x.$$

4.56. Însumăm sinusurile două cîte două:

$$E = 2 \sin \frac{(2a - b) + (2b - c)}{2} \cos \frac{(2a - b) - (2b - c)}{2} +$$

$$+ 2 \sin \frac{(2c - a) - (a + b + c)}{2} \cos \frac{(2c - a) + (a + b + c)}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{2a + b - c}{2} \cos \frac{2a - 3b + c}{2} + 2 \sin \frac{-(2a + b - c)}{2} \cos \frac{b + 3c}{2}.\ \text{Deci:}$$

$$E = 2 \sin \frac{a + b - c}{2} \sin \frac{2b + c - a}{2} \sin \frac{2c + a - b}{2}.$$

4.57. Egalăm expresia cu zero și obținem:

$$\cos^2 a - 2 \cos a\, (\cos b \cos c) - (1 - \cos^2 b - \cos^2 c) = 0$$

$$\cos a = \cos b \cos c \pm \sqrt{\cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 c + 1} =$$

$$= \cos b \cos c \pm \sqrt{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)} =$$

$$= \cos b \cos c \pm \sin b \sin c, \text{ de unde}$$

$$\cos a = \cos (b - c) \text{ și } \cos a = \cos (b + c). \text{ Rezultă}$$

$$- E = [\cos a - \cos (b - c)]\, [\cos a - \cos (b + c)] =$$

$$= 4 \cos (a + b - c) \cos (a - b + c) \cos (a + b + c) \cos (- a + b + c).$$

4.58. Notăm $a = x$ și $b - c = y$. Partea I devine după dezvoltări:

$$4 \sin x \cos x \sin y \cos y + \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$$

$$= \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$$

$$= \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x\, (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y\, (1 - \sin 2x) =$$

$$= \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x - \sin^2 y.$$

4.59. $E = \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x + \sin 7x + \sin x + \sin 11x - \sin x +$

$$+ \sin 15x + \sin x + \sin 19x - \sin x) = \frac{1}{2} [(\sin 3x + \sin 15x) +$$

$$+ (\sin 7x + \sin 11x) + (\sin 7x - \sin x)].$$



$$E = \sin 9x\,[\cos 6x + (\cos 2x + \cos 10x)] = \sin 9x\,(\cos 6x + 2\cos 4x \cos 6x) =$$

$$= \cos 6x \sin 9x\,(1 + 2\cos 4x) = \frac{\sin 9x \sin 12x}{2 \sin 2x}.$$

4.60. Avem $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}.$$

4.61. Se folosesc relaţiile:

$$\sin 3a = 4\sin a \sin(60° + a) \sin(60° - a)$$

$$\cos 3a = 4\cos a \cos(60° + a) \cos(60° - a)$$

Pentru $a = 20°$, verificarea este evidentă.

4.62. $E = \sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24} + \sin\frac{4\pi}{24} = \left(\sin\frac{\pi}{24} + \sin\frac{4\pi}{24}\right) + \sin\frac{5\pi}{24} =$

$$= 2\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{5\pi}{48} = 2\sin\frac{5\pi}{48}\left(\cos\frac{6\pi}{48} + \frac{5\pi}{48}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{11\pi}{96}\cos\frac{\pi}{96}.$$

4.63. $E = \sin\frac{\pi}{20}\sin\frac{2\pi}{20}\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{4\pi}{20}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{2\pi}{20}\cos\frac{\pi}{20} =$

$$= \frac{1}{16}\sin\frac{2\pi}{20}\sin\frac{4\pi}{20}\sin\frac{6\pi}{20}\sin\frac{8\pi}{20}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{32}\sin\frac{2\pi}{20}\sin\frac{4\pi}{20}\cos\frac{4\pi}{20}\cos\frac{2\pi}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{128}\sin\frac{4\pi}{20}\sin\frac{8\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2^{10}}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2^8}.$$

4.64. $\cos 2x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{(1 - \mathrm{tg}^2 a) + (1 - \mathrm{tg}^2 b)}{(1 + \mathrm{tg}^2 a) + (1 + \mathrm{tg}^2 b)} = \frac{\cos 2a \cos^2 b + \cos 2b \cos^2 a}{\cos^2 a + \cos^2 b} =$

$$= \frac{\cos 2a\,(\cos 2b + 1) + \cos 2b\,(\cos 2a + 1)}{(\cos 2a + 1) + (\cos 2b + 1)} = \frac{2\cos 2a \cos 2b + (\cos 2a + \cos 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b) + 2} =$$

$$= \frac{\cos 2a \cos 2b + \cos(a + b)\cos(a - b)}{1 + \cos(a + b)\cos(a - b)}.$$

4.65. Relaţia se mai scrie:

$$\sin(a + b)\sin(c - d) = \sin(a - b)\sin(c + d).$$

Dezvoltînd şi reducînd termenii asemenea obţinem:

$$\sin b \cos a \sin c \cos d = \sin a \cos b \sin b \cos c.$$

Tot la această relaţie se ajunge dezvoltînd relaţia a doua. De asemenea relaţia ultimă este echivalentă cu cea obţinută.

4.66. Avem $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b$, şi ştiind că $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

obținem $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos 2a)(1-\cos 2b)}{(1+\cos 2a)(1+\cos 2b)}$, de unde $\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$$=\frac{1+\cos 2a\cos 2b}{\cos 2a+\cos 2b}=\frac{1}{\cos 2x}.$$

4.67. Ținem seama de proprietățile rapoartelor

$$\frac{a}{\sin x}=\frac{c}{\sin(x+2y)}=\frac{a+c}{2\sin(x+y)\cos y}=\frac{b}{\sin(x+y)}, \text{ de unde } \frac{a+c}{b}=2\cos y.$$

La fel:

$$\frac{b}{\sin(x+y)}=\frac{d}{\sin(x+3y)}=\frac{b+d}{2\sin(x+2y)\cos y}=\frac{c}{\sin(x+2y)} \text{ și } \frac{b+d}{c}=$$

$$=2\cos y, \text{ deci } (a+c)c=(b+d)b.$$

4.68. $$E=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\sin 2x+2}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin 2x-2\cos x}=\frac{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\sin 2x+2}{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\sin 2x-2\cos 2x}=$$

$$=\frac{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\sin 2x+\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\sin 2x-\sin 2\varphi\cos 2x}=\frac{\sin 2x+\sin 2\varphi}{\sin 2(x-\varphi)}=\frac{\sin(x+\varphi)}{\sin(x-\varphi)}.$$

4.69. Relația de condiție se mai scrie:

$$\frac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b}=n;\ \frac{n+1}{n-1}=\frac{\sin 2(a+c)+\sin 2b}{\sin 2(a+c)\,.\,\sin 2b}=$$

$$=\frac{2\sin(a+b+c)\cos(a-b+c)}{2\cos(a+b+c)\sin(a-b+c)}=\frac{\operatorname{tg}(a+b+c)}{\operatorname{tg}(a-b+c)}.$$

4.70. $\frac{\sin x+\sin 5x}{A+C}=\frac{\sin 3x}{B}$ sau $\frac{2\sin 3x\cos 2x}{A+C}=\frac{\sin 3x}{B}$; $\cos 2x=\frac{A+C}{2B}$.

Pe de altă parte:

$$\frac{\sin x}{A}=\frac{\sin x(4\cos^2 x-1)}{B} \text{ sau } \frac{B}{A}=2(2\cos^2 x-1)+1;\ \cos 2x=\frac{B-A}{2A};$$

rezultă

$$\frac{A+C}{B}=\frac{B-A}{A} \text{ sau } B^2=A(A+B+C).$$

4.71. Transformăm în produse:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2};\ \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2};\ \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=c;$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b};\ \sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Din primele două egalităţi ridicate la pătrat obţinem:

$$\cos^2 \frac{x-y}{2} = \frac{a^2+b^2}{4}; \ \cos^2 \frac{x+y}{2} = \frac{b^2}{4} : \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{b^2}{a^2+b^2};$$

$$\cos(x-y) = 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1 = \frac{a^2+b^2}{2} - 1;$$

$$\cos(x+y) = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 = \frac{2b^2}{a^2+b^2} - 1$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y = \frac{b^4 + 2a^2b^2 + a^4 - 4a^2}{4(a^2+b^2)}.$$

Cunoscînd produsul $\cos x \ \cos y$ şi $\sin(x+y)$ înlocuite în ecuaţia $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = c$, obţinem eliminarea lui x şi y.

4.72. Din relaţia dată $\frac{n}{1} = \frac{\sin(2a+b)}{\sin b}$ obţinem:

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin(2a+b) + \sin b}{\sin(2a+b) - \sin b} = \frac{\sin(a+b)\cos a}{\cos(a+b)\sin a}$$ de unde:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{tg} a.$$

4.73. Pentru $\cos x \neq 0$ şi $\cos y \neq 0$, avem:

$\sin x - \sin x \sin^2 y - \sin y + \sin^2 x \sin y = 0$, sau

$(\sin x - \sin y)(1 + \sin x \sin y) = 0$, care dă

$\sin x - \sin y = 0$, şi $\sin x \sin y = -1$

sau $2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0$ şi $\sin x \sin y = -1$.

Rezultă $x - y = 2k\pi$ sau $x + y = (2k+1)\pi$.

Relaţia $\sin x \sin y = -1$ nu poate fi satisfăcută, deoarece $\cos x \neq 0$ şi $\cos y \neq 0$.

4.74. Dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ şi $y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avem:

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\cos y + \cos x) = 0$, deci:

$\operatorname{tg} x = 0$, sau $x = k\pi$, $\operatorname{tg} y = 0$, adică $y = k\pi$.

Pentru $\cos y + \cos x = 0$ rezultă $x + y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Deci $x = k\pi$ pentru orice y afară de $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, şi $y = k\pi$ pentru orice y diferit de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

4.75. Transformăm în produs:

$$\frac{\sin (x+y) \cos z}{\sin (x+z) \cos y}=\frac{\sin 2 z}{\sin 2 y}, \text{ unde}$$

$$\cos x - \cos (x+2y) = \cos x - \cos (x+2z) \text{ sau}$$

$$\cos(x+2y) = \cos (x+2z), \text{ deci:}$$

$$x+2y = x+2z+360\, k, \text{ sau } y-z=180\, k \text{ și}$$

$$x+2y = -x-2z+360\, k \quad \text{sau } x+y+z=180\, k.$$

4.76. Avem pentru $\cos x \neq 0$ și $\cos y \neq 0$:

$$\frac{\sin x \cos^2 y+\cos^2 x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}=0 \text{ sau}$$

$$(\sin x+\sin y)\ (1-\sin x \sin y)=0, \text{ de unde}$$

$$\sin x+\sin y=0 \text{ sau } \sin x \sin y=1 \text{ sau}$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}=0, \text{ care dă:}$$

$$x+y=2k\pi \quad \text{sau } x-y=(2k+1)\pi.$$

Relația $\sin x \sin y=1$ nu poate fi satisfăcută în condițiile problemei.

4.77. $A_1P_1=\sin\frac{2\pi}{n}$, $OP_1=\cos\frac{2\pi}{n}$, $P_1P_2=OP_1 \sin\frac{2\pi}{n}=$

$$=\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n};\ OP_2=\cos^2\frac{2\pi}{n};\ P_2P_3=\sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n}.$$

Avem $S_n=\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+$

$$+\sin\frac{2\pi}{n}\cos^{n-1}\frac{2\pi}{n}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}\left(\cos^n\frac{2\pi}{n}-1\right)}{\cos\frac{2\pi}{n}-1}.$$

Pentru $n=6$, $S_6=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)=\frac{63\sqrt{3}}{64}$.

4.78. Se multiplică toți termenii sumei cu $2\sin\frac{r}{2}$, transformăm produsul sinusurilor în diferențe de două cosinusuri și apoi adunăm.

4.79. Se folosește formula:

$$\sum_{k=2}^{n-2}\sin(x+kr)=\frac{\sin\left[x+\frac{(n-2)r}{2}\right]\sin\frac{(n-2)r}{2}}{\sin\frac{r}{2}}$$

şi se face $x = \frac{\pi}{n}$; $r = \frac{\pi}{n}$. Se obţine:

$$E = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

4.80. Înmulţim ambele părţi cu $\sin a$ şi apoi transformăm fiecare produs din partea a doua în sume după formula:

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\Big[\sin(x+y) - \cos(x-y)\Big].$$

Se obţine $S = \dfrac{\cos(na+2a)\ \sin(na)}{\sin a}$.

4.81. Avem $\sin\frac{x}{2}S = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos x + \sin\frac{x}{2}\cos 2x + \dots +$

$$+\sin\frac{x}{2}\cos nx = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \dots +$$

$$+\sin\frac{n+1}{2}x - \sin\frac{n-1}{2}x\Big) = \frac{1}{2}\sin\frac{n+1}{2}x.$$

$$S = \frac{1}{2}\Big[\sin\frac{n+1}{2}x\Big] : \sin\frac{x}{2}.$$

4.82. Se transformă fiecare produs de sinusuri după formula $\sin x\sin y =$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big].$$

Se adună şi se foloseşte suma cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică (v. problema precedentă).

4.83. Se folosesc formulele cunoscute:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kx) = \frac{\sin\left(a + \frac{n-1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kx) = \frac{\cos\left(a + \frac{n-1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

4.84. Transformăm numitorii în produse, primul termen devenind:

$$\frac{1}{2\cos x\cos 2x}.$$

Considerăm relaţiile

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x}; \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x},$$

$$\dots \operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} nx = \frac{\sin x}{\cos nx \cos (n+1)x}.$$

Prin adunare obţinem

$$\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin nx}{\cos (n+1)x \cos x},$$

de unde rezultă relaţia cerută.

Observare. Se poate rezolva şi prin metoda inducţiei matematice.

4.85. Avem, $\sin^3 ka = \frac{3}{4}\sin ka - \frac{1}{4}\sin 3ka$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^3 ka = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin ka - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin 3ka.$$

$$\text{Fie } \sum_{k=1}^{n} \sin ka = S_1.$$

$$2S_1 \sin\frac{x}{2} = 2\sin x \sin\frac{x}{2} + 2\sin 2x \sin\frac{x}{2} + \dots + 2\sin nx \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} -$$

$$-\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \dots + \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2} =$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}, \text{ deci:}$$

$$S_1 = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}; \text{ la fel găsim:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 3ka = \frac{\sin\frac{3na}{2}\sin\frac{3(n+1)a}{2}}{\sin\frac{3a}{2}}.$$

4.86. Se evaluăm suma:

$$S = \frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}.$$

Adunăm relațiile evidente:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\ldots\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+n\beta)\cos[\alpha+(n-1)\beta]},$$

obținem:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}=S.$$

În cazul particular $\alpha=0°$, $\beta=1°$ și $n+1$, în loc de n obținem egalitatea propusă.

Soluția II.

Vom folosi inducția completă. Pentru $x=0$ avem:

$$\frac{1}{\cos 0°\cos 1°}=\frac{\sin 1°}{\cos 1°\sin 1°}=\frac{\operatorname{tg} 1°}{\sin 1°}.$$

Presupunem că este adevărată pentru $n-1$, adică:

$$\frac{1}{\cos 0°\cos 1°}+\frac{1}{\cos 1°\cos 2°}+\cdots+\frac{1}{\cos(n-1)°\cos n°}=\frac{\operatorname{tg} n°}{\sin 1°}.$$

Pentru a arăta egalitatea din enunț scădem din ea egalitatea precedentă și rămîne de arătat că:

$$\frac{1}{\cos n°\cos(n+1)°}=\frac{\operatorname{tg}(n+1)°-\operatorname{tg} n°}{\sin 1°}.$$

4.87. $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\cos x\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos x+\cos x\cos 2x)$

$$\cos^3 2x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2x\cos 4x)\ldots\ldots\cos^3 nx=\frac{1}{2}(\cos nx+$$
$$+\cos nx\cos 2nx)$$

Adunînd, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\cos px+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\cos x\cos 2nx).$$

Ținem seama de relația:

$$\cos nx\cos 2nx=\frac{1}{2}(\cos nx+\cos 3nx),$$

de unde

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos nx\cos 2nx)=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\cos px+\frac{1}{4}\sum_{q=1}^{n}\cos 3qx,$$

care justifică relația cerută.

4.88.
$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos kx\cdot\cos(k+1)x} =$$
$$= \frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}[\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg}kx] =$$
$$= \frac{1}{2\sin x}[\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg}x] = \frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{\sin nx}{\cos(n+1)x\cos x} =$$
$$= \frac{\sin nx}{\sin 2x\cdot\cos(n+1)x}.$$

Altă soluţie se dă şi prin inducţie completă.

4.89. Folosim relaţia:

$$1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2^k} = \frac{\cos\frac{k}{2k-1}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}.$$

Dăm lui k valorile 1, 2, 3,..., n şi facem produsul.
Rezultă:

$$P_n = \frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}} = \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

la limită obţinem $P = 1$.

4.90. Avem:

$$\cos\frac{a}{2^k} + \cos\frac{b}{2^k} = \frac{\cos^2\frac{a}{2^k} - \cos^2\frac{b}{2^k}}{\cos\frac{a}{2^k} - \cos\frac{b}{2^k}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{a}{2^{n-1}} - \cos\frac{b}{2^{n-1}}}{\cos\frac{a}{2^n} - \cos\frac{b}{2^n}}.$$

Dăm lui k valorile 1, 2, 3,...n şi apoi facem produsul.

4.91. Se egalează cu m şi ecuaţia în sin x ce rezultă va avea rădăcini reale dacă:

$$m^2 - 6m + 1 > 0.$$

Rezultă maxim pentru $m = 3 - 2\sqrt{2}$. Maximul nu este admisibil, deoarece $\sin x \neq -(\sqrt{2}+1)$.

Minimul va fi pentru $m = 3 + 2\sqrt{2}$ şi corespunde lui $\sin x = \sqrt{2} - 1$.

4.92. Se înlocuiesc sin x şi cos x în funcţie de tg $\frac{x}{2}$. Se egalează apoi m şi se obţine ecuaţia:

$$(m+4)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 6\operatorname{tg}\frac{x}{2} + m - 4 = 0.$$

Se obține un maxim egal cu 5 pentru $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ și un minim egal, cu -5 pentru $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -3$.

4.93. Se consideră pătratul produsului dat și care se va scrie:

$$(\sin^2 x)^7 \ (\cos^2 x)^5.$$

Suma factorilor fiind constantă ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), putem scrie:

$$\frac{\sin^2 x}{7} = \frac{\cos^2 x}{5} = \frac{1}{12}.$$

Se obține un maxim în primul și al treilea cadran și un minim în celelalte două cadrane.

4.94. Se înlocuiește tg $3x$ în funcție de tg x și problema revine la a studia maximul funcției:

$$y = \frac{3 \operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Se obține $y_M = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, și $y_m = 3$.

4.95. Se înlocuiește tg $3x$ în funcție de tg x și se găsește un maxim egal cu $17-12\sqrt{2}$ pentru $x = 22°30'$ și un minim egal cu $17+12\sqrt{2}$ pentru $x = 67°30'$.

4.96. Suma factorilor este constantă, dar factorii nu pot deveni egali. În virtutea identității $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, maximul produsului va corespunde la minimul diferenței factorilor, adică la minimul expresiei $3-2 \sin x$, care are loc cînd $\sin x = 1$; $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$; iar maximul va fi egal cu 12.

4.97. Suma factorilor este constantă, dar factorii nu pot deveni egali. În virtutea identității:
$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, maximul produsului va corespunde la minimul diferenței factorilor, adică la minimul expresiei $3 + \cos 2x$. Minimul are loc $\cos 2x = -1$; $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, iar maximul produsului va fi egal cu 63.

4.98. Produsul $\operatorname{tg}^2 x \cdot 16 \operatorname{ctg}^2 x$ fiind constant, suma factorilor este minimă cînd factorii sînt egali; adică dacă $\operatorname{tg} x = \pm 2$.
Minimul va fi egal cu 8.

4.99. Se dezvoltă tg $(\theta - \varphi)$, se ține seama de relația dată și se obține:

$$\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{n-1}{(\sqrt{n \operatorname{tg} \varphi} - \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi})^2 + 2\sqrt{n}},$$

cea mai mare valoare a lui $\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi)$ o vom obține cînd $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{n \operatorname{tg} \varphi}$, adică dacă $\operatorname{ctg} \varphi = \pm \sqrt{n}$. Maximul este egal cu $\frac{(n-1)^2}{4n}$.

4.100. $\sin A + \cos B = \sin A + \sin (90° — B) = \sin A + \sin (90° — 150° + A) = \sin A + \sin (A — 60°) = 2 \sin (A—30°) \cos 30° = \sqrt{3} \sin (A — 30°) \leqslant \sqrt{3}$.

4.101. Suma arcelor este $\frac{a}{6}$. Se transformă produsul în sumă. Trebuie ca expresia $\cos \frac{7a — 12x}{6}$ să fie cît mai mare.

Rezultă
$$x = \frac{7a}{12}.$$

4.102. Fie O centrul cercului și A un vîrf al dreptunghiului de pe cerc și x unghiul făcut de diametru și raza OA.

Aria dreptunghiului este $2R \cos x$. $R \sin x = R^2 \sin 2x$, ori $\sin 2x = 1$ dacă $2x = 90^0$, deci dreptunghiul este $\frac{1}{2}$ din pătratul înscris în cercul întreg.

4.103. $\sin 3x = \sin (2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 2 \cos^2 x \sin x + \sin x (2 \cos^2 x — 1) = \sin x (4 \cos^2 x — 1)$.

Expresia din partea întîi a inegalității devine:

$$\sin x + \sin x \cos x + \frac{1}{3} (4 \cos^2 x — 1) \sin x =$$

$$= \frac{1}{3} \sin x (4 \cos^2 x + 3 \cos x + 2) = \frac{1}{3} \sin x \left[\left(2 \cos x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right],$$

care, evident, este pozitivă.

4.104. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = \frac{\sin a}{\cos x \cos y}$.

Minimul expresiei date este cînd $\cos x \cos y$ este maxim.

$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x — y) + \cos (x + y)] = \frac{1}{2} \cos (x—y) + \cos a]$

$\cos (x — y)$ este maxim cînd $x = y$ deci minimul expresiei

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \text{ este } \frac{2 \sin a}{1 + \cos a}.$$

4.105. $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x—y) + \cos (x + y)] = \frac{1}{2} \left[\cos (x — y) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Pentru $x — y = 0$, $\cos x \cos y = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$,

$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos (x — y) — \cos (x + y)] = \frac{1}{2} \left[\cos (x — y) — \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

pentru $x—y = 0$ avem:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \left(1 — \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 — \sqrt{2}}{4}.$$

4.106. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+1]$

pentru $x = y = 90°$, $\sin x \sin y = 1$.

4.107. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - 1]$

pentru $x = y$; $\cos(x-y) = \cos 0° = 1$; $\cos x \cos y = 0$.

4.108. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Pentru $x=y$ avem:

$$\cos x + \cos y = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

4.109. $$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin a}{\sin x \sin y}$$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos a]$,

iar maxir... lui $\cos(x-y)$ este cînd $x = y$. Deci, minimul sumei este:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin a}{\sin^2\frac{a}{2}} = 2\operatorname{ctg}\frac{a}{2}.$$

4.110. Se stabileşte mai întîi pentru cazul a două unghiuri $x+y=k$, scriind:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{2\sin k}{\cos(x-y) - \cos k} = \frac{2\sin k}{1-\cos k} = 2\operatorname{ctg}\frac{k}{2} \text{ (minim)}.$$

Apoi se extinde la 3 unghiuri.

4.111. $$E = -\frac{1-\cos 5x - 10}{1-\cos 5x} = -1 + \frac{10}{1-\cos 5x}.$$

Minimum este cînd $1-\cos 5x$ este maximă şi pozitivă, adică pentru

$$x = \frac{\pi}{5};\ \text{deci } E = -1 + \frac{10}{2} = 4.$$

4.112. a) $2 = \sin(8x-40°) + \sin 20° + \sin(22x+100°) - \sin 20° = \sin(8x-40°) + \sin(22x-260°) = 2\sin(15x-150°)\cos(-7x+110°) = 2\sin(15x-150°)\sin(7x-20°)$.

b) $30° \leqslant 15x - 150° \leqslant 150°$,

$60° \leqslant 7x - 20° \leqslant 120°$,

de unde $\sin(15x-150°) \geqslant \frac{1}{2}$;

$$\sin(7x-20°) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{deci } E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c) Pentru $x = 20°$ avem:

$$E = \sin 150° \sin 120° = \sin 30° \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4.114. Transformăm în produse:

$$\sin 2x \sin x > 0,$$
$$\sin x \cos 3x > 0,$$
$$\sin 2x \cos 3x > 0.$$

Din prima inegalitate avem:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$ Din a doua:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Din a treia:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Intersectînd cele trei mulţimi, avem:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right).$$

4.115. Inegalitatea se mai scrie:

$$8 \cos x \cos y \sin x \sin y - 8 \sin^2 x \sin^2 y - 1 < 0,$$
$$8 \sin x \sin y \cos (x+y) - 1 < 0,$$
$$1 - 8 \sin x \sin y \cos (x+y) > 0;$$
$$1 + 4 \cos (x+y) \cdot [\cos (x+y) - \cos (x-y)] > 0;$$
$$1 + 4 \cos^2 (x+y) - 4 \cos (x+y) \cos (x-y) > 0;$$
$$[2 \cos (x+y) - \cos (x-y)]^2 + \sin^2 (x-y) > 0,$$

care este suma a două pătrate, deci pozitivă.

5.1. $$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\Sigma \operatorname{tg} a-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1-\Sigma \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}=1,$$

de unde relaţia cerută.

5.2. $$E=-4 \sin \frac{c}{2} \sin^2 \frac{a-b}{2}.$$

5.3. $$E=\frac{\sin \frac{a}{2} \cos c}{\sin \frac{c}{2} \cos a}.$$

5.4. Se obţine:

$$\operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} C \text{ deci } B+C=\frac{\pi}{2}.$$

5.5. Relaţia de condiţie se mai scrie:

$$m+\cos 2c=\cos(2a+2b)+1, \text{ de unde:}$$

$$\frac{\cos 2c-\cos(2a+2b)}{\cos 2c+\cos(2a+2b)}=\operatorname{tg}(a+b+c)\cdot\operatorname{tg}(a+b+c).$$

5.6. $$E=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}-\frac{2\sin B\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}-\sin B\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}.$$

Numărătorul se mai scrie:

$$\cos\left(B - \frac{B+C}{2}\right) - \sin B \sin \frac{B+C}{2} = \cos B \cos \frac{B+C}{2}, \text{ deci}$$

$$E = \frac{\cos B \cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} = \cos B .$$

5.7. Să arătăm că suma a două laturi este mai mare decît cea de-a treia latură în condițiile date. Avem:

1°. $\sin x + \cos x - \cos 2x = \sin x + \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x =$

$$= \sin x + \sin^2 x + \cos x (1 - \cos x) > 0.$$

2°. $\sin x - \cos x + \cos 2x = \sin x - \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x =$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) > 0, \text{ deoarece:}$$

$\cos x > \sin x$, iar $\cos x + \sin x > 1$, suma catetelor unui triunghi dreptunghic este mai mare ca ipotenuza.

3°. $-\sin x + \cos x + \cos 2x = -\sin x + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x =$

$$= (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x + 1) > 0.$$

Trebuie observat că $\sin x$, $\cos x$ și $\cos 2x$ în condițiile date sînt numere pozitive.

5.8. Să demonstrăm că $\sin 2A + \sin 2B > \sin 2C$.

Avem:

$\sin 2A + \sin 2B = 2\sin C \cos (A-B)$, $\sin 2C = 2\sin C \cos C$ și

obținem:

$$\cos (A - B) > \cos C;\ |A - B| < C \text{ sau}$$

$$A < B + C \text{ și } B < A + C, \text{ de unde}$$

$$A < 180° - A \text{ adică } A < 90°, \text{ ori}$$

$B < 180° - B$ sau $B < 90°$ și analog în celelalte cazuri deci toate unghiurile trebuie să fie ascuțite.

Observare. Dacă un unghi este obtuz atunci cosinusul său este negativ.

5.9. $$\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

5.10. $\cos A = -\cos (B + C)$. Înlocuim și obținem:

$$\frac{-\cos (B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = 1 - \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C .$$

5.11. $\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C = (\sin A \cos B \cos A) \cos C + \cos A \cos B \sin C = \sin (A+B) \cos C + \cos A \cos B \sin C = \sin C \cos C + \sin C \cos A \cos B = \sin C (\cos C + \cos A \cos B) = \sin C [\cos A \cos B - \cos (A+B)] = \sin A \sin B \sin C.$

5.12. $$\Sigma \cos A = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

5.13. $$\frac{\cos (A+B+C) + \cos (A-B-C)}{\cos (A+B+C) - \cos (A-B+C)} = \frac{-1 + \cos (A-B-C)}{-1 - \cos (A-B-C)} =$$

$$= \frac{1 - \cos (A-B-C)}{1 + \cos (A-B+C)} = \frac{\sin^2 \frac{A-B-C}{2}}{\cos^2 \frac{A-B-C}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{A-B-C}{2} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 (B+C) = \operatorname{ctg}^2 A.$$

5.14. Avem:

$a \cos (B + \alpha) + b \cos (A - \alpha) = a \cos B \cos \alpha - a \sin B \sin \alpha + b \cos A \cos \alpha + b \sin A \sin \alpha = \cos \alpha (a \cos B + b \cos A) + \sin \alpha (b \sin A - a \sin B) = c \cos \alpha.$

Apoi, dacă $A+B+C = \pi$, avem : $\frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = \frac{\pi}{4}$,

deci:

$$\cos \frac{A}{2} \sin \left(\frac{B}{2} - \alpha \right) + \cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{A}{2} + \alpha \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{A+B}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{B-A}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{A+B}{2} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{A-B}{2} + \alpha \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{A+B}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{A+B}{2} + \alpha \right) \right] = \sin \frac{A+B}{2} \cos \alpha = \cos \frac{c}{2} \cos \alpha.$$

5.15. $\sin A = \sin (B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$

$$\sin (B-C) = \sin B \cos C - \sin C \cos B,$$

$$\sin (B+C) \sin (B-C) = \sin^2 B \cos^2 C - \sin^2 C \cos^2 B =$$

$$= \sin^2 B (1 - \sin^2 C) - \sin^2 C (1 - \sin^2 B) = \sin^2 B - \sin^2 C.$$

$$\Sigma \sin^3 A \sin (B-C) = \Sigma [\sin A (\sin^2 B + \sin^2 C] = 0.$$

5.16. Se aplică relația de forma:

$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x + \sin 3x)$; se ține seama că:

$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ se transformă sumele în produse.

5.17. Se aplică relaţia de forma:

$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$; se transformă sumele în produse.

5.18. $$\operatorname{tg}\frac{B}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2} \text{ sau}$$

$$\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \text{ deci:}$$

$$\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{A}{2} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{B+C-A}{2} + \sin\frac{B-A-C}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A-B+C}{2} + \sin\frac{C+B-A}{2}\right),$$

de unde:

$$\cos B - \cos A = \cos C - \cos B.$$

5.19. $$E = 2\sum\frac{\cos A\sin(B+C)\sin(B-C)}{\cos B\cos C} =$$

$$= 2\sum\frac{\cos^2 A(\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos A\cos B\cos C} = 0.$$

5.20. Folosim relaţiile $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$;

$$\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}.$$

Prima parte a relaţiei din enunţ devine:

$$\frac{(\cos A + 1) + (\cos B - \cos C) - \sin A}{(\cos A - 1) + (\sin C - \sin B) + \sin A} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{-2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C-B}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\left(-\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C-B}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

5.21. Avem $\sin A\sin(B-C) = \sin(B+C)\sin(B-C) =$
$= \sin^2 B - \sin^2 C.$

După desfăşurare toţi termenii se reduc.

5.22. Avem $A + B + C = 180°$; $\Sigma\, \text{tg}\, A = \text{tg}\, A\, \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C$.

Partea întîia este:

$$\text{tg}^2 A + \text{tg}\, A\, \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C \left(\frac{1}{\text{tg}\, A} + \frac{1}{\text{tg}\, B} + \frac{1}{\text{tg}\, C}\right) = \text{tg}^2 A + \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C + \text{tg}\, A\, \text{tg}\, C + \text{tg}\, A\, \text{tg}\, B.$$

Partea a doua este:

$$\text{tg}\, B\, \text{tg}\, C\, (1 + \text{tg}^2 A) = \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C + \text{tg}\, A\, (\text{tg}\, A + \text{tg}\, B + \text{tg}\, C) = \text{tg}^2 A + \text{tg}\, B\, \text{tg}\, C + \text{tg}\, A\, \text{tg}\, B + \text{tg}\, A\, \text{tg}\, C.$$

5.23. $$\Sigma \cos 2A = 2 \cos (A - B) \cos (A - B) + 2 \cos^2 C - 1 = 2 \cos C\, [\cos C - \cos (A + B)] - 1 = -2 \cos C\, [\cos (A + B) + \cos (A - B)] - 1 = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C.$$

5.24. Primul membru se poate scrie:

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin (B + C)}{\sin B \sin C} = \frac{\cos A\, [\sin B \sin C - \cos A] + 1}{\sin A \sin B \sin C} = \text{ctg}\, A\, \frac{\sin B \sin C - \cos A}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}.$$

5.25. $$\sin \frac{A + B - 2C}{3} = \sin (60° - C) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \cos C - \sin C\right),$$

$$\cos \frac{A + B - 2C}{3} = \cos (60° - C) = \frac{1}{2}\left(\cos C + \sqrt{3} \sin C\right),$$

$$\text{tg}^2 \frac{(A + B - 2C)}{3} = \frac{3 \cos^2 C + \sin^2 C - \sqrt{3} \sin 2C}{\cos^2 C + 3 \sin^2 C + \sqrt{3} \sin 2C} = \frac{2 + \cos 2C - \sqrt{3} \sin 2C}{2 - \cos 2C + \sqrt{3} \sin 2C}.$$

5.26. $\cos A + \cos B \cos C = \cos B \cos C - \cos (B + C) = \sin B \sin C$, deci $(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = \sin A \sin B \sin C$, la fel pentru celelalte.

5.27. $\sin 2B + \sin 2C = 2 \sin (B + C) \cos (B - C) = 2 \sin A \cos (B - C)$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin A\, [\cos A + \cos (B - C)] = 2 \sin A\, [\cos (B + C) + \cos (B - C)] = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

5.28. $\cos (A + B) + \cos C = 0$, $\cos A \cos B + \cos C = \sin A \sin B > 0$,

$$(\cos A \cos B + \cos C)^2 = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B),$$

de unde rezultă identitatea cerută.

5.31. Relația cunoscută $\cos^2 A+\cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ devine:

$$\cos^2\alpha \sin^2\beta + \cos^2\beta \sin^2\gamma + \cos^2\gamma \sin^2\alpha = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cdot \sin\alpha \sin \beta \sin\gamma,$$ sau $$\mathrm{tg}^2\beta \sec^2\gamma + \mathrm{tg}^2\gamma \sec^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha \sec^2\beta = \sec^2\alpha \sec^2\beta \sec^2\gamma - 2 \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta \mathrm{tg}\gamma.$$

$$\mathrm{tg}^2\beta (1 + \mathrm{tg}^2\gamma) + \mathrm{tg}^2\gamma (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \mathrm{tg}^2\alpha (1 + \mathrm{tg}^2\beta) = (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) (1 + \mathrm{tg}^2\beta) (1 + \mathrm{tg}^2\gamma) - 2 \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta \mathrm{tg}\gamma.$$

De unde:

$$\mathrm{tg}^2\alpha \mathrm{tg}^2\beta \mathrm{tg}^2\gamma - 2\mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta \mathrm{tg}\gamma + 1 = 0,$$

deci
$$\mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta \mathrm{tg}\gamma = 1.$$

5.34. $A + B + C = 180°; \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 1.$

5.35. Relația se mai poate scrie:

$$\mathrm{ctg}\, C (\mathrm{ctg}\, A + \mathrm{ctg}\, B) = 1 - \mathrm{ctg}\, A \,\mathrm{ctg}\, B \quad \text{sau}$$

$$\frac{\cos C}{\sin C}\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) = \frac{\cos C}{\sin C} \cdot \frac{\sin (A + B)}{\sin A \sin B} =$$

$$= \frac{\cos C}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = \frac{-\cos (A + B)}{\sin A \sin B} = 1 - \mathrm{ctg}\, A \,\mathrm{ctg}\, B.$$

5.36. Relația se mai scrie $\Sigma\, \mathrm{tg}\, A = \sum \frac{1}{\mathrm{tg}\, A}$ sau $(\Sigma\, \mathrm{tg}\, A)^2 =$

$$= \Sigma\, \mathrm{tg}\, A\, \mathrm{tg}\, B, \qquad \Sigma\, \mathrm{tg}^2 A + \Sigma\, \mathrm{tg}\, A\, \mathrm{tg}\, B = 0,$$

de unde $\Sigma\, (\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B)^2 = 0$, care implică:

$\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B = 0$, $\mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C = 0$, $\mathrm{tg}\, C + \mathrm{tg}\, A = 0$ sau $\mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}\, B = \mathrm{tg}\, C = 0$, ceea ce este absurd.

5.37. $$\Sigma \sin A \sin B \sin (A - B) = \sin A \sin B \sin (A - B) + \sin B \sin C \sin (B - C) + \sin C \sin A \sin (C - A) =$$
$$= \sin A [\sin B \sin (A - B) + \sin C \sin (C - A)] + \sin B \sin C \sin (B - C) = \frac{1}{2} \sin A [\cos (2B - A) - \cos A + \cos A - \cos (2C - A)] + \sin B \sin C \sin (B - C) =$$
$$= \sin A \sin (B + C - A) \sin (C - B) + \sin B \sin C \sin (B - C) = \sin (B - C) [\sin A \sin (A - B - C) + \sin B \sin C] =$$
$$= \frac{1}{2} \sin (B - C) [\cos (B + C) - \cos (2A - B - C) + \cos (B - C) - \cos (B + C)] = \sin (B - C) \sin (A - B) \sin (C - A).$$

5.38. $$\sum \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 2.$$

5.39. *Soluția I.* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \frac{1 \pm \operatorname{tg} x}{1 \mp \operatorname{tg} x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Partea a doua se scrie succesiv:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{4}} - \frac{1-\operatorname{tg}\frac{B}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}} + \frac{1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{C}{4}} - \frac{1-\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}} =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}\frac{B}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{4}} + \frac{4\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{4}} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Soluția II. Folosim $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a =$ $= 2\operatorname{ctg} 2a$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) =$

$$= 2\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\right] = 2\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

5.40. Împărțind relația 5.34 prin $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, obținem a doua relație cerută.

5.41. Avem $\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{A+C}{2}$, $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$.

Prima parte a relației E devine:

$$E = \frac{\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} =$$

$$= \frac{(\cos A - \cos C)(1+\cos B) + (\cos B + \cos C)(1-\cos A)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} =$$

$$= \frac{(\cos A + \cos B)(1-\cos C)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{A}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin^3\frac{C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}.$$

5.42. $\sin^2\frac{A-B}{2} = \frac{1-\cos(A-B)}{2}$. Deci:

$$\sin^2\frac{A-B}{2} + \frac{\cos(A-B)}{2} = \frac{1}{2}.$$ Rămîne de arătat că:

$$\sin^2\frac{C}{2} + \frac{\cos C}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{sau}$$

$$\frac{1-\cos C}{2} = \sin^2\frac{C}{2},$$ care este evident.

5.43. Notăm cu E partea întîi a egalității. Avem:

$$\cos A\cos(A+60°) = \frac{1}{2}[\cos(2A+60°) + \cos 60°] =$$

$$= \frac{1}{4} + \cos^2(A+30°) - \frac{1}{2}.$$

$$\Sigma[\cos A\cos(A+60°)] = \Sigma\cos^2(A+30°) - \frac{3}{4}.$$ De unde:

$$E = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

5.44. Se aplică formulele de transformare în produse termenilor fracției din primul membru, ținîndu-se seama că:

$$A + B + C = \pi.$$

5.45. Se aplică formulele de transformare în produse termenilor fracției din primul membru și se ține seama că:

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2} \text{ și } \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}.$$

5.46. În relația cunoscută $\Sigma \operatorname{tg} A_1 = \pi \operatorname{tg} A_1$, notăm:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \ldots$$ și rezultă relația din enunț.

5.47. Prima relaţie se mai scrie:

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}=2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b+c}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{b-c}{2}\right);\ \cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{b+c}{2}\right)=$$

$$=\cos\frac{b-c}{2}\left(\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{b+c}{2}\right).$$

Înlocuind în paranteze pe $\sin\frac{a}{2}$ prin $\cos\frac{\pi-a}{2}$ şi $\cos\frac{a}{2}$ cu $\sin\frac{\pi-a}{2}$ şi apoi transformînd în produse obţinem:

$$\cos\frac{a}{2}\left(-2\sin\frac{\pi-a+b+c}{4}\sin\frac{\pi-a-b-c}{4}\right)=$$

$$=\cos\frac{b-c}{2}\left(2\cos\frac{\pi-a+b+c}{4}\sin\frac{\pi-a-b-c}{4}\right);$$

$$\sin\frac{\pi-a-b-c}{4}\left[\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\pi-a+b+c}{4}+\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\pi-a+b+c}{4}\right]=0.$$

De unde avem:

$$\sin\frac{\pi-a-b-c}{4}=0;\quad \text{adică } a+b+c=(4k+1)\pi$$

sau egalînd cu zero paranteza mare obţinem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{-a+b+c}{4}\right)=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\ \text{sau}$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{b+c-a}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{b+c-a}{4}}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{-\cos\frac{a}{2}},\ \text{de unde;}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b+c-a}{4}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\cos\frac{b-c+a}{4}\cos\frac{b-c-a}{4}}{-2\sin\frac{b-c+a}{4}\sin\frac{b-c-a}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{c+a-b}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{a+b-c}{2}}=1.$$

5.48. Se aduce la acelaşi numitor; se dau factori comuni; se aplică formulele de transformare în produse şi se ţine seama că $A+B+C=\pi$. Se obţine relaţia cunoscută între unghiurile unui triunghi.

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

5.50. Avem $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$;

$\Sigma \cos 2A = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$. Relația devine:

$$\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C + \sin C \cos C + \cos A \sin C \left[\sqrt{2}\left(\cos B \cos \frac{\pi}{4} + \sin B \sin \frac{\pi}{4}\right)\right] + \sin A \sin (B + C) = \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C + \sin (A + B) \cos C + \cos A \sin C (\cos B + \sin B) + \sin A \sin (B + C) = \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C + \Sigma \sin A \sin B \cos C + \Sigma \cos A \cos B \sin C.$$

$$\Pi \cos\left[\left(A - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \Pi\left(\cos A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A \cdot \frac{1}{2} + \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos A \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \Pi (\cos A + \sin A) =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})^3 \, \Pi (\cos A + \sin A)}{8} = \frac{1}{(\sqrt{3} - 1)^3} \Pi (\cos A + \sin A).$$

Partea a doua devine deci egală ca și prima cu $\Pi (\cos A + \sin A)$.

5.51. Ținem seama că $2 \cos B \cos C = \cos (B + C) + \cos (B - C) = - \cos A + \cos (B - C)$; $2 \sin A \sin C = \cos (B - C) + \cos A$

$$E_1 = \sin^2 (B - C) + [2 \cos A - \cos (B - C)]^2 = 1 - 4 \cos A [\cos (B - C) - \cos A] = 1 - 4 \cos A [\cos (B - C) + \cos (B + C)] = 1 - 8 \cos A \cos B \cos C$$

$$E_2 = 1 + 4 \cos A [\cos (B - C) - \cos (B + C)] = 1 + 8 \sin A \sin B \sin C.$$

5.52. $$E = \sum \frac{\cos A (\cos B + \cos A) + \cos C (\cos A + \cos B)}{\sin A (\sin B + \sin A) + \sin C (\sin A + \sin B)} =$$

$$= \sum \frac{(\cos A + \cos B)(\cos A + \cos C)}{(\sin A + \sin B)(\sin A + \sin C)} =$$

$$= \sum \frac{4 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}} =$$

$$= \sum \frac{\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+C}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A+C}{2}} = \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1.$$

5.54. Folosim relațiile $\Sigma \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, $\Sigma \operatorname{ctg} A =$
$= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$.

Înmulțindu-le obținem prima relație.

Pentru a doua relație considerăm triunghiul $A_1 B_1 C_1$ cu unghiurile

$$A_1 = 90° - \frac{A}{2},\ B_1 = 90° - \frac{B}{2},\ C_1 = 90° - \frac{C}{2}$$

și prima relație se transformă într-a-doua.

Pentru a treia relație considerăm triunghiul $A_2 B_2 C_2$ cu unghiurile $A_2 =$
$= 180° - 2A$ etc.

5.56. Partea a doua devine:

$$E = \cos 45° \, \Sigma \cos 2A = \frac{\sqrt{2}}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) +$$

$$+ \cos(90° - 2A - 2B)] = \frac{\sqrt{2}}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) +$$

$$+ 2\sin(A+B)\cos(A+B)].$$

Ținem seama că $A + B = 45° - C$, deci:

$$E = \sqrt{2}\cos(45° - C)[\cos(A-B) + \sin(A+B)] =$$

$$= (\cos C + \sin C)(\cos A \cos B + \sin A \sin B + \sin A \cos B +$$

$$+ \cos A \sin B) = \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C +$$

$$+ \Sigma \cos A \sin B \sin C + \Sigma \sin A \cos B \cos C.$$

5.58. $\Sigma \sin^2 A = \sum \frac{1 - \cos 2A}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Sigma \cos 2A =$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1] =$$

$$= 2 + [\cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B)] =$$

$$= 2 + 2\cos A \cos B \cos C, \text{ deci } E = 2.$$

5.59. $\Sigma \sin 2A + \sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 6° = 2[\Sigma \cos(30° - 2A) +$
$+ \cos 6°] = 4\cos(30° - A - B)\cos(A - B) + 4\cos(18° - C)\cdot\cos(12° - C) =$
$= 4\cos(12° + C)\cos(A - B) + 4\cos(A + B)\cos(12° - C) =$
$= 4[\cos 12° \cos C - \sin 12° \sin C][\cos A \cos B + \sin A \sin B)] +$
$+ 4[\cos A \cos B - \sin A \sin B][\cos 12° \cos C + \sin 12° \sin C] =$
$= 8(\cos 12° \cos A \cos B \cos C - \sin 12° \sin A \sin B \sin C).$

5.62. Ținem seama de relația:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Relația devine:

$$\frac{1}{2}[\cos 45° - \cos(2A + 45°)] - \frac{1}{2}[\cos 45 - \cos(2B + 45)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(2B + 45° - \cos(2A + 45°)] = \sin(A - B)\sin(A + B + 45°) =$$

$$= \sin(A - B)\sin(C - 45°).$$

5.63. Relația se mai poate scrie:

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{A}{2} - \cos\left(B + \frac{A}{2}\right)\right] = \cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}\right].$$

Transformăm în produse:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A}{2};$$

însă $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ și $\cos\frac{A+C}{2} = \sin\frac{B}{2}$.

5.64. $$\sum\frac{1}{1+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}} - 2\Pi\frac{1}{1+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}} =$$

$$= \frac{\sum\left(1+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right) - 2}{\left(1+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)\left(1+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)} =$$

$$= \frac{3 + 2\sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2} - 2}{1 + \sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \sum\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = 1,$$

deoarece $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

5.65. În relația cunoscută $\sum\sin A = 4\Pi\cos\frac{A}{2}$, notăm $A_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$

și analogele; $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$,

deci:

$$\sum\cos\frac{A}{2} = 4\Pi\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) = \sqrt{2}\,\Pi\left(\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}\right).$$

5.66. $\dfrac{\sin B+\sin A}{\sin B-\sin A}=\dfrac{2\sin\dfrac{B+A}{2}\cos\dfrac{B-A}{2}}{2\cos\dfrac{B+A}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}}$.

Deci prima parte a egalității devine:

$$\frac{\sin\dfrac{B+A}{2}\cos^2\dfrac{B-A}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos^2\dfrac{B+A}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}\sin\dfrac{B+A}{2}}=\frac{\cos^2\dfrac{B-A}{2}}{\cos^2\dfrac{B+A}{2}}=\frac{1+\cos(B-A)}{1+\cos(B+A)}.$$

5.67. $\cos^2 A-\cos^2 B-\sin^2 C=\cos^2 A-\cos^2 B-\sin^2(A+B)=$

$=(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)-\sin^2(A+B)=$

$=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\cdot 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}-\sin^2(A+B)=$

$=\sin(A+B)[\sin(B-A)-\sin(A+B)]=\sin(A+$

$+B)\cdot 2\sin\dfrac{B-A-A-B}{2}\cos\dfrac{B-A+A+B}{2}=$

$-2\sin A\sin C\cos B$, de unde rezultă relația cerută.

5.68. Avem $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\sec^2 A=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos^2 A\cos B\cos C}=$

$=\dfrac{\sin(A+C)\sin(A+B)}{\cos A\cos C\cos A\cos B}=(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C)(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)=\operatorname{tg}^2 A+$

$+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)$, însă $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=\Sigma\operatorname{tg}A$.

5.69. Se folosește relația:

$$\cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C.$$

5.70. Relația $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$ se transformă în cea propusă dacă notăm:

$$A_1=180°-2A,\ B_1=180°-2B;\ C_1=180°-2C;\ \Sigma A_1=180°.$$

5.71. *Soluția I.* Relația se mai scrie:

$$\sum\frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}=3+\Sigma\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=3+1=4.$$

Soluția II. Relația se mai scrie:

$\Sigma\cos\dfrac{B-C}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, sau $\Sigma\dfrac{1}{2}(\sin B+\sin C)=$

$=\Sigma\sin A=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, relația cunoscută.

5.73. În relația $\Sigma \operatorname{tg} A = \pi \operatorname{tg} A$ notăm $A_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}$ și analogele

$$A_1 + B_1 + C_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi \cdot \text{Deci:}$$

$\sum \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right) = \Pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right)$, însă: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{4}}$; înlocuind în precedenta obținem relația cerută.

5.74. $\frac{\pi}{8} + \frac{A}{8} = \frac{a}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{B}{8} = \frac{b}{2}$ și $\frac{\pi}{8} + \frac{C}{8} = \frac{c}{2}$.

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{3\pi}{8} + \frac{A+B+C}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, \text{ deci}$$

$a + b + c = \pi$, iar relația $\Sigma \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \Pi \operatorname{ctg}\frac{a}{2}$ este cunoscută.

5.78. $\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \frac{1 - \sin C}{1 + \sin C}$, de unde:

$$\cos B = \sin C, \text{ deci } B + C = 90°.$$

5.79. Se transformă suma în produs și se ține seama că $A + B + C = \pi$. Se obține:

$$\cos\frac{A - B}{2} = \cos\frac{C}{2}, \text{ deci } A = B + C.$$

5.80. Deoarece $\cos\frac{B - C}{2} \neq 0$ se aplică la relația dată, formulele de transformare în produse și se obține:

$$B + C = 90°.$$

5.81. Se obține $2 \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C + \operatorname{tg} B$.

5.82. Se înlocuiește $\sin A = \sin(B + C)$, se îndepărtează soluțiile neadmisibile, care dau B sau C egal cu $n\pi$ și rămîne:

$\cos(B + C) = 0$, adică $B + C = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Întrucît $B + C$ este cuprins între 0 și π, avem $k = 0$, deci $B + C = \frac{\pi}{2}$.

5.83. Se ține seama că $A + B + C = \pi$, se aplică formula de transformare în produs la $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$; se scrie $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$; se ține seama că $\sin\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2}$; se dezvoltă $\cos\frac{A + B}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$.

5.84. Relaţia ne dă:

$$2 = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}} + \frac{1+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{-1+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}.$$

b) Se observă că $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A+C}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$ şi se ţine apoi seama de prima relaţie.

c) Se observă că a doua relaţie se poate scrie

$$2\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

5.85. Relaţia dată se scrie: $\sin B - \sin C = \cos C - \cos B$; se aplică formulele de transformare în produs şi se obţine

$\sin\frac{B-C}{2} = 0$, de unde $B = C$ sau $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$, de unde:

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 1, \text{ adică } B + C = 90°.$$

5.86. Se transformă $2\cos A\cos B$ în sumă; se înlocuieşte $\cos C = -\cos(A+B)$ şi pe $1 = \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B)$. Se obţine: $\sin(A-B) = 0$ şi $2\cos(A+B) + \cos(A-B) = 0$, de unde $A = B$ şi $A + B = 120°$.

5.87. Întrucît $\operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec} B$ şi $\operatorname{cosec} C$ formează o progresie aritmetică, putem scrie:

$2\operatorname{cosec} B = \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} C$ şi această relaţie ne dă: $2\sin A\sin C = (1+\cos B)(\cos A + \cos C)$ şi de aici:

$$\cos B = \frac{2\sin A\sin C}{\cos A + \cos C} - 1.$$

5.89. $\sin B - \sin C = 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$;

Relaţia devine:

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \frac{B-C}{2} = 45° \text{ sau } B - C = 90°.$$

5.90. Relaţia se mai scrie:

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 + \cos^2 b + \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b - 1 = 0,$$
$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c = 0, \text{ sau}$$
$$(\cos a + \cos b \cos c - \sin b \sin c)(\cos a + \cos b \cos c +$$
$$+ \sin b \sin c) = 0,$$
$$[\cos a + \cos (b + c)][\cos a + \cos (b - c)] = 0;$$
$$4 \cos \frac{a+b+c}{2} \cos \frac{b+c-a}{2} \cos \frac{a+b-c}{2} \cos \frac{a+c-b}{2} = 0.$$

Este suficient ca un cosinus să se anuleze, deci avem patru soluţii, adică:

$$\frac{a+b+c}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}; \text{ sau } a + b + c = (2k+1)\pi;$$

$b + c - a = (2k + 1)\pi$; $a + b - c = (2k + 1)\pi$; $a + c - b = (2k + 1)\pi$, sau dacă scriem condensat:

$$a \pm b \pm c = (2k + 1)\pi.$$

5.91. Expresia se mai scrie:

$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{a-b}{2} \left[\sin \frac{a+b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} + 1 \right].$$ Folosind relaţiile:

$\cos \frac{a+b}{2} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right]$ şi $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, expresia de mai sus devine:

$$2 \cos \frac{a-b}{2} \left[\sin \frac{a+b}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2}\right].$$

Suma unghiurilor din paranteza mare fiind π, folosim formula într-un triunghi.

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Expresia devine astfel:

$$8 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{4} \cos \frac{\pi - a - b}{4} \cos \frac{\pi}{4}.$$

5.92. Dezvoltăm şi observăm că:

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A + B) = \sin C \text{ şi}$$
$$\Sigma \cos^2 A + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

5.93. $\cos\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3}\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Dezvoltăm şi obţinem relaţia cerută.

5.94. *Soluția I.* $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C$ sau $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C}$;

$\sin(A-B)\cos C = \sin(B-C)\cos A$;

$\sin(A+C-B) + \sin(A-B-C) = \sin(B+A-C) +$
$+ \sin(B-C-A)$

$\sin(\pi - 2B) + \sin(2A - \pi) = \sin(\pi - 2C) + \sin(2B - \pi)$

de unde $2\sin 2B = \sin 2A + \sin 2C$.

Reciproc. Pornim de la relația:

$\sin 2B - \sin 2A = \sin 2C - \sin 2B$.

Transformăm diferența în produse:

$\sin(A-B)\cos(A+B) = \sin(B-C)\cos(B+C)$ sau

$\sin(A-B)\cos C = \sin(B-C)\cos A$,

$$\frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin B \cos C - \sin C \cos B}{\cos B \cos C},$$

de unde $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C$.

Soluția II. Avem succesiv:

$2\sin 2B - (\sin 2A + \sin 2C) = 4\sin B\cos B - 2\sin B\cos(A-C) =$
$= 2\sin B\,[-2\cos(A+C) - \cos(A-C)] =$
$= 2\sin B\,[\sin A \sin B - 3\cos A\cos C] =$
$= 2\cos A\cos B\cos C\,(\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - 3\operatorname{tg} B) =$
$= 2\cos A\cos B\cos C\,(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - 3\operatorname{tg} B) =$
$= 2\cos A\cos B\cos C\,(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C - 2\operatorname{tg} B) = 0$.

5.95. Partea a II-a se mai scrie:

$(\sin A\cos B + \sin B\cos A)^2 + (\sin A\cos A - \sin B\cos B)^2 =$
$= \sin^2 C + \sin^2(A-B)\cos^2(A+B) = \sin^2 C +$
$+ \sin^2(A-B)\cos^2 C = \sin^2 C\,[1 - \sin^2(A-B)] +$
$+ \sin^2(A-B) = \sin^2(A-B) + \sin^2 C\cos^2(A-B)$.

5.96. *Soluția I.* Avem succesiv:

$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C$;

$\frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin(C-B)}{\sin B \sin C}$,

$\sin(B-A)\sin C = \sin(C-B)\sin A$. De unde:

$\cos(B-C-A) - \cos(B-A+C) = \cos(C-B+$
$+A) - \cos(C-B+A)$;

$\cos(2B-\pi) - \cos(\pi - 2A) = \cos(2C-\pi) - \cos(\pi - 2B)$;

sau $2\cos 2B = \cos 2A + \cos 2C$.

Soluția II. Avem:

$$2\cos 2B - (\cos 2A + \cos 2C) = 2\cos^2 B - 2\sin^2 B + 2\cos B\cos(A - C) = 2\cos B\,[-\cos(A + C) + \cos(A - C)] - 2\sin^2 B = 4\cos B\sin A\sin C - 2\sin^2 B = 2\sin A\sin B\sin C\,(2\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C) = 0.$$

5.97. $1 + \cos 2C = 2\cos^2 C = 2\cos^2(A + B)$; $\sin 2C = 2\sin C\cos C$; $\cos 2B + \cos 2A = 2\cos(A + B)\cos(A - B)$, deci $\sin 2B - \sin 2A = 2\cos(A + B)\sin(B - A) = 2\cos C\sin(A - B)$.

$$\frac{1 + \cos 2C}{\cos 2B + \cos 2A} = \frac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)};\quad \frac{\sin 2C}{\sin 2B - \sin 2A} = \frac{\sin C}{\sin(A - B)}$$

Partea I devine:

$$\frac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)} + \frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} = \frac{\sin(A + B + A - B)}{\sin(A - B)\cos(A - B)} = \frac{2\sin 2A}{\sin(2A - 2B)}.$$

5.98. $$\frac{\cos(B - C)}{2\sin\dfrac{A + C - B}{2}\cos\dfrac{A + B - C}{2}} = \frac{\cos(B - C)}{2\sin(90^\circ - B)\cos(90^\circ - C)} =$$

$$= \frac{\cos(B - C)}{2\cos B\sin C} = \operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B},\quad \cos B \neq 0.$$

$$\frac{\cos(B - C)}{2\sin C} = \sin B \text{ sau } \cos(B - C) = 2\sin B\sin C$$

$\cos B\cos C + \sin B\sin C = 2\sin B\sin C$, de unde:

$\cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B + C) = 0,\quad B + C = 90^\circ$

deci triunghiul este dreptunghic în A.

5.99. $$\frac{a + c}{b} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A - C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}} = \frac{\cos\dfrac{A - C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} = \frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}.$$

Relația din enunț conduce la relația:

$$\cos\frac{A - C}{2} = \cos\frac{B}{2};\quad \frac{A - C}{2} \in (-90^\circ, +90^\circ),$$

$$\text{deci: } \frac{A - C}{2} = \pm\frac{B}{2}, \text{ de unde:}$$

$$A = B + C \text{ sau } C = A + B,$$

deci triunghiul este dreptunghic, avînd:

$$A = 90° \text{ sau } C = 90°.$$

Reciproca se verifică prin transformări echivalente.

5.100. Se ţine seama că $\operatorname{tg} u = \frac{ax}{x^2 + a^2}$ şi $\operatorname{tg} v = \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + ax + a^2}$.

5.101. Din relaţia $\cos^2 (B - C) \geqslant 8 \cos A \cos B \cos C$ şi analogele obţinem inegalitatea cerută.

5.102. Se notează cu MB mediana în triunghiul oarecare ABC şi $\sphericalangle ABM = \alpha$; $\sphericalangle CBM = \gamma$. Avem:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin A}{\sin C}; \text{ apoi } \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C}.$$

Se transformă sumele în produse şi se observă că

$$\frac{\alpha - \gamma}{2} = \varphi; \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{B}{2};$$

$$\frac{A + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}.$$

5.103. Se asociază primul termen cu al treilea şi al doilea cu al patrulea, se transformă sumele în produse; se ţine seama că

$$A + B + C + D = 2\pi.$$

5.104. Se ţine seama că:

$$D = 2\pi - (A + B + C) \text{ şi deci } \cos D = \cos (A + B + C);$$

se aplică apoi formulele de transformare în produse.

5.105. Se transformă produsele în sume; se observă apoi că $\cos \frac{A + B}{2} + \cos \frac{C + D}{2} = 0$; se transformă apoi termenii rămaşi în produse.

5.106. Se transformă produsele în sume; se ţine seama că: $\cos \frac{A + B}{2} + \cos \frac{C + D}{2} = 0$; se transformă apoi termenii rămaşi în produse.

5.107. Se ţine seama de relaţia:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} = \sin \frac{B + C}{2} \sin \frac{C + A}{2}.$$

5.108. Se ţine seama de relaţia:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} = \sin \frac{B + C}{2} \sin \frac{C + A}{2}.$$

5.109. Se ține seama că:

$$\sin\left[C + \frac{B+D}{2}\right] = \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+D}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}.$$

5.110. Se scrie: $\cos D = \cos[2\pi - (A + B + C)] = \cos(A + B + C)$

5.111. Se grupează primul termen cu al treilea și pe al doilea cu al patrulea și se transformă în produse.

5.112. $\cos B \cos(B + 2C) - \cos D \cos(D + 2A) = \frac{1}{2}[\cos(2B+2C) + \cos 2C - \cos(2D + 2A) - \cos 2A] = \frac{1}{2}(2\cos^2 C - 1 - 2\cos^2 A + 1) =$

$$= \cos^2 C - \cos^2 A.$$

Deoarece $\cos(2B + 2C) = \cos(360° - 2D - 2A) = \cos(2D + 2A)$.

Capitolul 6

6.1. Ecuaţia se mai scrie:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \quad \text{sau} \quad \sin^2 x = 2\sin^2 x \cos^2 x,$$

de unde:

$$\sin^2 x = 0; \quad x_1 = k\pi \text{ și } \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x^2 = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6.2. Ecuaţia devine:

$3 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$ sau $(1 - \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 2) = 0$

şi admite rădăcina reală $x = 180\,k + 45°$.

6.3. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x - \sin^2 x = -3;$$

sau

$$1 - \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = -3; \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de unde $x = 180\,k \pm 45°$.

6.4. $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{3\pi}{4}\cos x + \cos\frac{3\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x),$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$. Ecuaţia devine:

$$\cos x = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ sau}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0.$$

De unde:

$$2 \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(-x + \frac{5\pi}{8}\right) = 0, \text{ sau}$$

$$\sin\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = 0, \; x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$$

6.5. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

După înlocuiri şi calcule obţinem:

$$\cos 2x\,(1 - \sin^2 2x) = \frac{1}{8}\,; \; \cos^3 2x = \frac{1}{8}.$$

Soluţie reală este $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = 360\,k \pm 60°$, $x = 180\,k \pm 30°$.

6.6. *Soluţia I*

$\operatorname{tg} x\,(\cos a \cos x + \sin a \sin x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$,
de unde $\operatorname{tg} x \sin a \sin x = \sin a \cos x$, deci:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1;\; x = 180\,k \pm 45°.$$

Soluţia II. Ecuaţia se mai scrie:

$$\sin(a - x) + \operatorname{tg} x \cos(a - x) = \sin(a + x) + \sin(a - x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\,;\; \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; x = 180\,k \pm 45°.$$

6.7. $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$.

Se obţine apoi $\sin x\,(1 - 4 \sin^2 x) = 0$,

de unde $x = 180\,k$ şi $x = 180\,k \pm 30°$.

6.8. $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$, deci:

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)^2 = \cos 2x \text{ sau}$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x, \text{ dar}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x, \text{ deci avem:}$$

$$\cos 2x = 0;\; x_1 = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;\quad 2 \cos\frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$x - \frac{\pi}{4} = k\pi;\; x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$x = x_1 \cup x_2 = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6.9. Notăm $\operatorname{tg} x = t$. Ecuaţia devine:

$$4 \cdot 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2} + 4\frac{2t}{1+t^2} + t = 0;\quad t \neq \pm 1.$$

Obţinem $t\,(t^6 - 9t^4 + 27t^2 + 27) = 0$ sau $t\,(t^2 - 3)^3 = 0$

$$\operatorname{tg} x = 0,\quad x = k\pi,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3,\quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

6.10. Avem $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$. Ecuaţia devine:

$$\sqrt{2}\sin^2 3x - 3\sin 3x + \sqrt{2} = 0, \text{ de unde:}$$

$$\sin 3x = \sqrt{2} \text{ (nu convine) şi } \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x = 3k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4};\quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}.$$

6.11. Ecuaţia se mai scrie:

$$\sqrt{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x = \sqrt{2},$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0;\quad \cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;\quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x = k\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}.$$

6.12. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{7\pi}{24} + k\pi \text{ şi } x_2 = \frac{\pi}{24} + k\pi.$$

6.13. Fie $\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = t$. Avem:

$$2(2+\sqrt{3})\frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 + \sqrt{3}, \text{ apoi:}$$

$$(3+\sqrt{3})t^2 - 2(2+\sqrt{3})\,t + (1+\sqrt{3}) = 0.$$

$$\text{De unde } \operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 1 \text{ şi } \operatorname{tg}\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$x_1 = 120°k + 30°;\quad x_2 = 120\,k + 20°.$$

6.14. Ecuaţia se mai scrie:

$$2(a^2 - b^2)\sin x \cos x - 2ab\sin^3 x = 0,$$

$$\sin x = 0,\quad x_1 = 180k^\circ$$

$$ab\cos^2 x + (a^2 - b^2)\cos x - ab = 0.$$

$$\cos x_2 = \frac{b}{a};\quad \cos x_3 = -\frac{a}{b},\ \text{deci}$$

$$x_2 = \arccos\frac{b}{a};\quad \text{sau } x_3 = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Discuţie. Pentru $\cos x_2 = \frac{b}{a}$ rezultă $|b| \leqslant |a|$, iar pentru $\cos x_3 = \left(-\frac{a}{b}\right)$ rezultă $|a| \leqslant |b|$. Pentru $|a| = |b|$ avem $\cos x = \pm 1$.

Cum aceste inegalităţi nu au loc simultan, rezultă că ecuaţia admite sau pe x_2 sau x_3.

6.15. $4\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; de unde:

$$\sin x = 0,\ x_1 = 180k \text{ şi } 8\sin^2 x = 3.$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$x_2 = 180k \pm \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

6.16. Ridicăm la pătrat şi obţinem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2|\sin x|\cdot|\cos x| = a^2$$

$$|\sin 2x| = 1 - a^2,\ \text{rezultă } 0 \leqslant 1 - a^2 \leqslant 1$$

$$\text{sau } 0 \leqslant a^2 \leqslant 1 \text{ deci } -1 \leqslant a \leqslant 1.$$

1°. Dacă $\sin 2x = 1 - a^2 \geqslant 0$, deci:

$$0 \leqslant 2x < 180^\circ,\qquad 0 \leqslant x \leqslant 90^\circ$$

$$360^\circ \leqslant 2x \leqslant 540^\circ,\qquad 180 \leqslant x \leqslant 270^\circ.$$

2°. Dacă $\sin 2x = a^2 - 1 \leqslant 0$, atunci:

$$180^\circ \leqslant 2x \leqslant 360^\circ;\qquad 90^\circ \leqslant x \leqslant 180^\circ,$$

$$540^\circ \leqslant 2x \leqslant 720^\circ;\qquad 270^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ.$$

Avem $x = \frac{1}{2}\left[180k \pm (-1)^k \arcsin(1 - a^2)\right]$.

6.17. Folosim relaţia $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$.

Avem:

$$2\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 0;$$

$$2\left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 2x = 0, \text{ de unde:}$$

$$x_1 = k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ și } \quad x_2 = k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \frac{k\pi}{2}.$$

6.18. Se ține seama de formula:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \text{ și ecuația devine:}$$

$$2\cos a \cos x = 0; \quad x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}.$$

6.19. $x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$.

6.20. Se obțin două șiruri de soluții:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ și } x = (2k+1)\pi.$$

Aceste trei progresii aritmetice se pot uni într-una singură:

$$\text{deci } x \in \left\{\frac{2n-1}{3}\pi\right\}.$$

6.21. $x \in \left\{k\,360° \pm \arccos\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$.

6.22. Ecuația este o ecuație reciprocă de gradul trei în tg x, care se poate scrie:

$$(\operatorname{ctg} x - 1)\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

$$x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{k\pi + \operatorname{arcctg}\left(\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

6.23. Se exprimă totul în sin x și cos x.

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

6.24.

$$x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\pi \pm (-1)^k\frac{\pi}{6}\right\}.$$

6.25. Se substituie $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

$$x \in \left\{4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

6.26. $x \in \left\{k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{6}\right\}$.

6.27. Se scrie $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ şi
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ şi se obţine o ecuaţie de gradul doi în $\cos 2x$:

$$x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

6.28. Se ţine seama că:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

şi apoi se obţine:

$$x \in \left\{k \cdot 90^\circ \pm \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

6.29. $x \in \{k\, 180^\circ \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt[4]{5}\}$.

6.30. Se obţine o ecuaţie de gradul doi în ctg x de forma:

$$\operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} x - 1 = 0.$$

6.31. Se obţine ecuaţia $\operatorname{tg} 2x = m$.

6.32. Se exprimă totul în $\cos x$ şi ecuaţia de gradul doi în $\cos x$ dă:

$$x = \arccos \frac{m+4}{2m-1}.$$

Din condiţia $-1 \leqslant \frac{m+4}{2m-1} \leqslant 1$ se deduce că ecuaţia dată va avea soluţii pentru $m \leqslant -1$ şi $m \geqslant 5$.

6.33. Se exprimă totul în $\sin x$ şi din discuţia ecuaţiei de gradul doi în $\sin x$, reiese: $1 < m < 3$.

6.34. $x \in \left\{k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right\}$.

6.35. $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} - \frac{a+b}{4}\right\} \cup \left\{\frac{(2k-1)\pi}{2} + \frac{a-b}{2}\right\}$.

6.36. $x \in \left\{k\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{8}\right\}$.

6.37. Ecuaţia se scrie:

$$\sin(x^2+1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right), \text{ de unde:}$$

$x^2 + 1 = 2x + \frac{\pi}{2}$ şi de aici: $x = +1 \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, determinarea principală.

6.38. $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right\}$.

6.39. $x \in \left\{ \frac{k\pi}{12} + \frac{\pi}{36} \right\}$.

6.40. $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, determinarea principală.

6.41. Se obține ecuația: $\sin^2 x = 3 \sin^2 a$

și de aici condiția $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \sin a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6.42. Se substituie $\frac{x}{10} = y$ și se obține ecuația $\sin 5y - \cos y = 0$ ușor de rezolvat.

$$x \in \{ 150° + k\, 600° \} \cup \{ 225° + k\, 900° \}.$$

6.44. $x \in \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$.

6.45. $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 4 \cos 2x$ sau

$$\frac{2 \sin^2 x + \cos 2x}{\sin 2x} = 4 \cos 2x, \text{ de unde } 4 \sin 2x \cos 2x = 1,$$

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \text{ și apoi } x = \frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24},\ k \in z.$$

6.46. Se înlocuiesc $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și se obține ecuația:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0, \text{ ușor de rezolvat.}$$

$$x \in \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ 2k\pi + 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} \right\}.$$

6.47. Se exprimă totul în $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, după ce se fac unele operații. Se obține ecuația:

$$(1 - t)(2t^2 + 3t - 1) = 0, \text{ ușor de rezolvat.}$$

$$x \in \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ 2k\pi + 2 \operatorname{arctg}\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \right\} \cup \left\{ 2k\pi + 2 \operatorname{arctg}\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \right\}.$$

6.48. Se exprimă totul în $\sin\frac{x}{2}$ și $\cos\frac{x}{2}$.

$$x \in \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right\}.$$

6.49. Se înlocuiește sin x și cos x în funcție de tg $\frac{x}{2}$.

$$x \in \{2k\pi\} \cup \left\{2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right\}.$$

6.50. Se ține seama că:

$$\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1.$$

Se obține ecuația $\operatorname{ctg}^2 x = 4$.

$$x \in \left\{k\pi \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right\}.$$

6.51. Se ține seama că $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ și se obține ecuația:

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ecuație ușor de rezolvat.}$$

6.52. Se ține seama că tg $60° = \sqrt{3}$ și ecuația devine:

$$\sin(x + 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau:}$$

$$\sin(x + 60°) = \sin 45°, \text{ ca soluțiile:}$$

$$x \in \left\{2k\pi - \frac{\pi}{12}\right\} \cup \left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right\}.$$

6.53. Se înlocuiesc $\cos^2 x$ și $\sin^2 x$ în funcție de cos $2x$ și se ține seama că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

$$x \in \{k\pi\} \cup \left\{k\pi - \frac{\pi}{3}\right\}.$$

6.54. Se folosesc formulele:

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \text{ și } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ etc.}$$

$$x \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}.$$

6.55. Se ține seama că:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}; \quad x \in 2k\pi.$$

6.56. Se ține seama că $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ și se obține:

$$x \in \{k\pi + \operatorname{arctg} 3\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

6.57. $x \in \{k\pi\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$.

6.58. $x \in \left\{k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{2}\right\}$.

6.59. $x \in \left\{k\pi\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \arccos \frac{1}{4}\right\}$.

6.60. Este o ecuaţie simetrică în $\sin x$ şi $\cos x$.
Se substituie:

$$x = \frac{\pi}{4} + y \text{ şi se obţine ecuaţia:}$$

$2\cos^2 y - 2\sqrt{2}\cos y + 1 = 0$, o ecuaţie uşor de rezolvat.

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{2k\pi\right\}.$$

6.61. Este o ecuaţie simetrică în $\sin x$ şi $\cos x$.

$$x \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{6}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2} - \sqrt{14}}{6}\right\}.$$

6.62. Se înlocuieşte $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ cu cosinusul arcului complimentar şi apoi se aplică formulele de transformare în produse.

$$x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}.$$

6.63. Ecuaţia, după ce se aplică formulele $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$ şi $\cos 3x$ şi $\sin 3x$, se poate pune sub forma:

$$2\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right).$$

$$x_1 \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

6.64. Se aplică formulele de transformare în produse $\cos 5x - \cos x$ şi $\sin 5x - \sin x$. Se obţine:

$$\sin 2x(\cos 3x + \sin 3x) = 0.$$

$$x \in \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right\}.$$

6.65. Se înlocuieşte $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ şi se aplică apoi formulele de transformare în produse. Se obţine $x \in \left\{(8k + 1)\frac{\pi}{4}\right\}$.

6.66. $x \in \{ k\pi \}$.

6.67. Se grupează primul termen cu al doilea și al treilea cu al patrulea și se aplică formulele de transformare în produse.

Se obțin șirurile de soluții:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}.$$

Se poate ușor observa că elementele primului șir sînt conținute în șirul al treilea.

Soluția generală se compune deci din două șiruri, adică:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right\}.$$

6.68. Se ține seama că:

$$1 + \sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$$

$$x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

6.69. Ecuația se scrie:

$$(\cos^2 4x - \cos^2 2x) + (\cos^2 3x - \cos^2 x) = 0.$$

Se aplică apoi descompunerea în factori.

$$x \in \{ k\pi \} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}.$$

6.70. Se exprimă totul în cos x.

$$x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}.$$

6.71. Se transformă numitorul în produs.

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos 2x$$

$$x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right\}.$$

6.72. Se scrie $\operatorname{tg} 4x = \dfrac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - 2 \sin^2 2x}$.

6.73. $x \in \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

6.74. Se amplifică ecuația cu 2 și se desfac produsele în sume. Se obține ecuația: $\cos 12x = \cos 4x$ în soluțiile:

$$x = \frac{k\pi}{4} \text{ și } x = \frac{k\pi}{8},$$

cu observația că în al doilea rînd de soluții se va da lui k valori impare, deoarece pentru k par rezultatele se confundă cu primul șir.

6.75. După ce se elimină numitorii, se va ţine seama că

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$x \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{2k\pi + \frac{11\pi}{12}\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{5\pi}{12}\right\}.$$

6.76. Se observă că:

$3 - 4\sin^2 \frac{x}{2} = 1 + 2\cos x$, care apare factor comun în ecuaţia dată:

$$x \in \left\{\left(\frac{k}{4} \pm 1\right)\pi\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

6.77. Ecuaţia se aduce la forma:

$(1 + \cos x)(2\sin x + 1) = 0$, ecuaţie uşor de rezolvat.

$$x \in \{(2k + 1)\pi\}.$$

6.78. Ecuaţia se aduce la forma:

$4\sin 2x \sin\frac{7x}{2} \sin\frac{5x}{2} = 0$, ecuaţie uşor de rezolvat.

6.79. Se substituie $\sin x = t$ şi se observă că ecuaţia $4t^3 - 3t + 1 = 0$ are ca rădăcină pe $t = -1$ şi deci:

$$4(t^3 - 3t + 1) = (t + 1)(4t^2 - 4t + 1) = 0$$

$$x \in \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}\right\}.$$

6.80. Se scriu relaţiile între rădăcini şi coeficienţi şi se ţine seama de relaţia dată. Se obţine ecuaţia:

$$\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

6.81. Se exprimă totul în $\operatorname{tg} x = t$ şi se obţine ecuaţia:

$2(t - 1)(t^2 - 2t - 1) = 0$, care se rezolvă uşor.

6.82. Ecuaţia se reduce la:

$$\operatorname{ctg} x (\cos^2 x - \sin^2 x - 8\sin x \cos x) = 0.$$

6.83. Se observă că $\sin x = \frac{1}{2}$ este o soluţie a ecuaţiei date, deci ecuaţia se poate scrie sub forma:

$(2\sin x - 1)(4\sin^2 x + 2\sin x - 3) = 0$, ecuaţie uşor de rezolvat.

6.84. Se substituie $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, apoi $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ şi se ţine seama că expresia $2\cos^3 x - \cos x + 1$ se poate scrie sub forma:

$$(1 + \cos x)\ (2\cos^2 x - 2\cos x + 1).$$

Se obţin apoi trei ecuaţii uşor de rezolvat, care dau

$$\sin x = 0, \quad \cos x = -1, \quad \cos x = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}.$$

6.85. Se substituie $\sin x + \sqrt{\sin x} = u$ şi se obţine

$$\sin x = \frac{1}{4}, \ \sin x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}.$$

6.86. Se înlocuieşte $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{şi } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}; \ \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

şi se obţine ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x = 2\sin x \cos x \text{ sau}$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = 0 \text{ cu soluţiile } x = k\pi \text{ şi } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Se observă în acest caz că pentru toate soluţiile obţinute ecuaţia are două şiruri de soluţii singulare.

6.87. Se obţin ecuaţiile: $\operatorname{tg} x = 0$,

$$m\operatorname{tg}^2 x - m + 2 = 0.$$

Pentru ca rădăcinile ecuaţiei a doua să fie reale trebuie ca:

$$m \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty).$$

6.88. $m \in [-2, 2]$.

6.90. Se transformă în produs $(\sin x + \sin 3x)$ şi din discuţia ecuaţiilor obţinute va reieşi că ecuaţiile vor avea soluţii reale dacă $|m| \geqslant 1$.

6.91. Ecuaţia se poate scrie:

$$\sin x + \cos x = a^b$$

$$\text{şi se obţine } \sin x = \frac{a^b \pm \sqrt{2 - a^{2b}}}{2}.$$

Din condiţia $a^{2b} \leqslant 2$ sau $a^b \leqslant \sqrt{2}$ rezultă $b < 0, a < 1$ sau $b > 0, a > 1$.

6.92. Substituim $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ şi obţinem ecuaţia:

$$(2a^2 + a - 1)\cos^2 x - (2a + 1)\cos x + 1 = 0, \text{ de unde:}$$

$$\cos x = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{2a^2 + 3a + 1}}{2a^2 + a - 1}.$$

Discuţie. Rădăcinile ecuaţiei trebuie să fie reale şi cuprinse între -1 şi $+1$.

O singură valoare a lui $\cos x$ va satisface ecuaţia, dacă:

$$f(-1) \cdot f(1) < 0 \qquad (1)$$

ori

$$f(1) = 2a^2 - a - 1 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a - 1),$$

$$f(-1) = 2a^2 + 3a + 1 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a + 1)$$

şi condiţia (1) devine:

$$4\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 (a + 1)(a - 1) < 0.$$

Produsul $4\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ fiind întotdeauna pozitiv, este suficient să luăm $(a + 1)(a - 1) < 0$, adică $a \in (-1, 1)$.

6.93. Se foloseşte metoda omogenizării şi apoi se divide cu $\cos^2 x$. Se obţine ecuaţia:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$x \in \left\{k\pi + \operatorname{arctg}\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\} \cup \left\{k\pi + \operatorname{arctg}\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right\}, \quad k \in z$$

6.94. Se înlocuieşte $\operatorname{cosec} x$ în funcţie de $\sin x$ şi se ţine seama că: $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$. Se obţine ecuaţia $\sin 2x - 2\cos 2x = 0$, ecuaţie uşor de rezolvat.

$$x \in \left\{k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right\}.$$

6.95. Ecuaţia se scrie:

$$4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x - 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

care duce după împărţirea cu $\cos^2 x$ la ecuaţia

$$2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 9 = 0,$$

cu soluţiile:

$$x \in \left\{k\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right\} \cup \{k\pi + \operatorname{arctg}(-3)\}.$$

6.96. Este o ecuație omogenă de gradul trei de omogenitate:

$$x \in \left\{ k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \right\}.$$

6.97. Se folosește metoda omogenizării și ecuația se poate scrie:

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x\,(\sin^2 x + \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} - 7\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

care duce la ecuația $\operatorname{tg}^4 x - 6\operatorname{tg}^2 x + 9 = 0$ sau $(\operatorname{tg}^2 x - 3)^2 = 0$ cu soluțiile:

$$x \in \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Soluția care verifică ecuația inițială este:

$$x \in \left\{ k\pi + \frac{\pi}{3} \right\}.$$

6.99. Se scrie $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ și apoi se împart toți termenii cu $\cos^2 x$.

$$x \in \left\{ k\pi + \frac{\pi}{4} \right\} \cup \left\{ k\pi + \operatorname{arctg}(-5) \right\},\ k \in z.$$

6.100. Se ține seama că $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ și $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

6.101. Ecuația se poate scrie:

$$8\sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^2 x = 3.$$

Se aplică apoi metoda omogenizării și se obține ecuația:

$$3\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0.$$

$$x \in \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{6} \right\} \cup \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right\}.$$

6.102.

$$(\operatorname{tg} x + 2)\left(1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

sau $\dfrac{(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, de unde:

$$(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

6.103.

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 2;\ \operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{2};$$

$$x = k\pi \pm \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2}).$$

6.104. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x =$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}.$$

Ecuaţia devine:

$$1-\frac{2}{3}=\frac{\sin^2 2x}{2} \text{ sau } \sin^2 2x=\frac{2}{3},$$

$$\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}};\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

6.105. Ecuaţia se mai scrie:

$$\mathrm{tg}^2 x-4\mathrm{tg}\, x+1=0, \text{ de unde } \mathrm{tg}\, x=2\pm\sqrt{3};$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6},\ k \text{ întreg}.$$

6.106. Ecuaţia se mai poate scrie:

$|1+\mathrm{tg}\, x|-|1-\mathrm{tg}\, x|=1$, deoarece schimbarea de semn a expresiilor $1+\mathrm{tg}\, x$ şi $1-\mathrm{tg}\, x$ se face din 45 în 45°. Considerăm cazurile:

Dacă $0<x<45°$, avem $1+\mathrm{tg}\, x-1+\mathrm{tg}\, x=1$ sau $\mathrm{tg}\, x=\frac{1}{2}$.

Dacă $45°<x<90°$, avem $1+\mathrm{tg}\, x-\mathrm{tg}\, x+1=1$, nu convine.

Dacă $90°<x<135°$, atunci:

$$-1-\mathrm{tg}\, x-1+\mathrm{tg}\, x=1, \text{ nu convine.}$$

Dacă $135°<x<180°$, avem:

$1+\mathrm{tg}\, x-1+\mathrm{tg}\, x=1$ sau $\mathrm{tg}\, x=\frac{1}{2}$, însă nu convine cînd:

$$135°<x<180°.$$

Convine $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}=26°34'$, determinarea principală.

6.107. Ecuaţia devine:

$$\frac{3\mathrm{tg}\, x\sqrt{\mathrm{tg}\, x}}{2\,\mathrm{tg}\, x-1}=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}} \text{ sau } \mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}\, x+1=0$$

$$\mathrm{tg}\, x=1;\quad x=180°\,k+45°.$$

6.108. $\cos 2a=2\cos^2 a-1=2\,\frac{2+\sqrt{3}}{4}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$, rezultă $x=15°$; $x_0=360°k\pm15°$.

6.109. Deoarece $x=0$ nu este o soluţie a ecuaţiei, împărţim prin $\sin^3 x$ şi obţinem:

$$6-5\mathrm{cosec}^2 x+2\mathrm{ctg}^3 x=0 \text{ sau}$$
$$2\mathrm{ctg}^3 x-5\mathrm{ctg}^2 x+1=0, \text{ de unde:}$$
$$\mathrm{ctg}\, x_1=\frac{1}{2};\ \mathrm{ctg}\, x_2=1+2\sqrt{2} \text{ şi } \mathrm{ctg}\, x_3=1-\sqrt{2},$$

de unde $x_1=180k+63°\,26'5'',6$; $x_2=180°k+22°30'\,6'',6$;

$$x_3=180°\,k+112°\,29'58'',3.$$

6.110. Se descompune în ecuațiile tg $x=0$; $x=k\pi$ și $6\text{tg}^4 x+6\text{tg}^2 x-8=0$;

$$\text{tg}\, x = \pm\sqrt{0{,}758305}\,,$$

$$\text{tg}\, x = \pm\, 0{,}8708;\quad x = 180°k \pm 41°02'58''\frac{7}{13}\,.$$

6.111. $m(1-2\sin^2 x) + 2(m^2+3)\sin x - 7\,m = 0\,,$

$$2m\sin^2 x - 2(m^2+3)\sin x + 6m = 0$$

$$\sin x = \frac{m^2+3\pm\sqrt{m^4+6\,m^2+9-12\,m^2}}{2m} = \frac{m^2+3\pm(m^2-3)}{2m}\,.$$

De unde:

$$\sin\, x_1 = \frac{2m^2}{2m} = m \text{ cu condiția } |m| \leqslant 1\,.$$

$$\sin\, x_2 = \frac{3}{m}\text{ cu condiția } 3 \leqslant |m|\,.$$

Observare. Ecuația nu admite pe x_1 și x_2 în același timp, iar dacă $|m| \in (1,3)$, ecuația nu admite nici o rădăcină.

6.112. Din relațiile $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ și $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ obținem:

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\sin x - \sin 3x)\sin 3x = 4m \text{ sau}$$

$$\sin^2 3x + \cos^2 3x + 3\,(\cos 3x\cos x - \sin 3x \sin x) = 4\,m\,,$$

de unde:

$$\cos 4x = \frac{4m-1}{3}\,;\quad x = \frac{k\,\pi}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{4m-1}{3}\,.$$

Trebuie să avem:

$$-1 \leqslant \frac{4m-1}{3} \leqslant 1 \text{ sau } -\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1\,.$$

6.113. $\dfrac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \dfrac{\sin x\sin 3x}{\cos x\cos 3x} = \dfrac{\cos\, 2x - \cos\, 4x}{\cos\, 2x + \cos\, 4x}$, deci:

$$\frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\cos^2\, 2x} = \frac{2\cos\, 2x}{\cos\, 2x + \cos\, 4x}\text{ sau}$$

$3\cos^2 2x - 2\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$, deci:

$$(2\cos 2x - 1)\,(2\cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\,;\quad 2x = 360\,k \pm\frac{\pi}{3}\,;\quad x = 180\,k\, \pm\frac{\pi}{6}\,.$$

$$\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\quad 2x = k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,;\quad x = \frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\,.$$

6.114. Avem $(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 4x) + (\mathrm{tg}\, 2x + \mathrm{tg}\, 3x) = 0$.

$$\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0,$$

deci $\sin 5x = 0$, iar $\dfrac{1}{\cos x \cos 4x} + \dfrac{1}{\cos 2x \cos 3x} \neq \infty$.

Mai avem:

$$\frac{\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Numărătorul se mai scrie după anulare:

$$\cos x + \cos 5x + \cos 5x + \cos 3x = 0.$$

Se înlocuieşte $\cos 3x$ şi $\cos 5x$ în funcţie de $\cos x$. Soluţiile obţinute nu trebuie să anuleze numitorul $\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x$.

6.115. Ecuaţia se descompune în următoarele ecuaţii:

$$\sin x = 0, \ \cos x = 0, \ \cos x = \pm \sqrt{\frac{3m-2}{4m}}.$$

6.116. Avem $\dfrac{\mathrm{tg}\,(m-3)\,x.}{\mathrm{tg}\,(m+1)\,x} = \dfrac{\mathrm{tg}\,(m+2)\,x}{\mathrm{tg}\, mx}$ sau

$$\frac{\mathrm{tg}\,(m+3)\,x - \mathrm{tg}\,(m+1)\,x}{\mathrm{tg}\,(m+3)\,x + \mathrm{tg}\,(m+1)\,x} = \frac{\mathrm{tg}\,(m+2)\,x - \mathrm{tg}\, mx}{\mathrm{tg}\,(m+2)\,x + \mathrm{tg}\, mx},$$

de unde:

$$\frac{\sin 2x}{\sin (2m+4)\,x} = \frac{\sin 2x}{\sin (2m+2)\,x} \text{ sau}$$

$$\sin (2m+4)\,x = \sin (2m+2)\,x.$$

Prin urmare:

$$(2m+4)\,x_1 + (2m+2)\,x_1 = (2k+1)\pi, \quad \text{de unde } x_1 = \frac{(2k+1)\,\pi}{4m+6}$$

sau

$$(2m+4)x_2 - (2m+2)x_2 = 2k\pi, \quad \text{de unde } x_2 = k\pi.$$

Discuţie. Soluţia $x_0 = \dfrac{k\,\pi}{2}$ introdusă dă $\sin 2x = 0$, care nu corespunde decît pentru k par, căci altfel $\mathrm{tg}\, mx$ şi $\mathrm{tg}\,(m+2)x$ sau $\mathrm{tg}\,(m+1)x$ şi $\mathrm{tg}\,(m+3)x$, după cum m este impar sau par, nu are sens.

6.117. O metodă. Folosim relaţiile: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

unde am notat $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t$. Ecuaţia devine:

$$9t^2 - 6t + 1 = 0; \ (3t-1)^2 = 0; \text{ deci } \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{x}{2} = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\,;\ x = 2k\,\pi + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\,.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{9}} = \frac{3}{4}\,;\ x = 2k\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\,.$$

6.118. Ecuaţia se mai scrie:

$$(\cos x - \sin x)\ (\cos x + \sin x) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$x = 180k + 30 \text{ şi } x = (2k+1)\ 90° - 30°\,.$$

6.119. Ecuaţia se mai scrie:

$$b\sin x - \sqrt{a^2+b^2}\sin 2x = -a\cos x\,,$$

unde $b^2 + (-a)^2 = \left(-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$. Împărţim cu $-\sqrt{a^2+b^2}$ şi notăm

$\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, atunci $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$. Ecuaţia devine:

$-\cos\varphi\sin x + \sin 2x - \sin\varphi\cos x = 0$ sau $\sin 2x - \sin(\varphi + x) = 0$,

de unde:

$$2\sin\frac{x-\varphi}{2}\cos\frac{3x+\varphi}{2} = 0 \text{ sau}$$

$$\sin\frac{x-\varphi}{2} = 0;\ \frac{x-\varphi}{2} = k\pi,\quad x_1 = 2k\pi + \varphi$$

$$\cos\frac{3x+\varphi}{2} = 0;\ \frac{3x+\varphi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}\,;$$

$$x_2 = \frac{2k\,\pi}{3} + \frac{\pi-\varphi}{3} = \frac{(2k+1)\ \pi-\varphi}{3}\,.$$

6.120. Folosim relaţia $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ şi

$$a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x + a^2\sin^2 x = a^2 + b^2\,,$$

avem:

$$(a\cos x + b\sin x)^2 + (a\sin x - b\cos x)^2 = a^2 + b^2, \text{ deci}$$

$$(a\sin x - b\cos x)^2 = a^2 + b^2 - c^2 \text{ sau}$$

$$a\sin x - b\cos x = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2} \text{ şi}$$

$$b\sin x + a\cos x = c, \text{ de unde:}$$

$$\sin x = \frac{ac \mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \text{ şi}$$

$$\cos x = \frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}, \text{ deci:}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{ac \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} = ab \mp c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

6.121. $\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = (\cos x + \sin x)$ sau

$$\cos x + \sin x = 0; \ \cos x - \sin x = \cos x \sin x$$

$$\sin 2x = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ de unde } x_2 = k\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

6.122. Ecuația devine $\cos^2 x(8\cos^2 x - 3) = 0$, cu rădăcinile date de ecuațiile:

$$\cos x = 0 \text{ și } \cos x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

6.123. Ecuația se mai scrie:

$4\mathrm{tg}^2\, 3x - 15\, \mathrm{tg}\, 3x - 4 = 0$, cu rădăcinile $\mathrm{tg}\, 3x = 4$ și $\mathrm{tg}\, 3x = -\frac{1}{4}$.

Rezultă $3x = \mathrm{arctg}\, 4 + k\pi$ sau

$$x_1 = \frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3} \mathrm{arctg}\, 4 \text{ sau}$$

$$x_1 \cong 60°k + \frac{76°}{3}, \text{ de unde:}$$

$$x_1 = 25°20'; \ 85°, \ 20'; \ 145°,20'$$

$$x_2 = 60k + \frac{180° - 14°}{3} = 60k + 55°.20',$$

de unde $x_2 = 55°,20°; \ 115°,20°; \ 175°,20'$.

6.124. Ecuația se mai scrie:

$$\sqrt{3} - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 0, \text{ sau } \cos 2x + \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} \sin 2x = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3},$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}, \text{ de unde:}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \ x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}; \ x_2 = k\pi + \frac{\pi}{12}.$$

Valorile lui x cuprinse pe cercul trigonometric sînt

$$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}.$$

6.125. Ecuaţia se mai scrie:

$$8 \sin^6 x + 8\cos^6 x = 2 \text{ sau}$$

$$(1 - \cos 2x)^3 + (1 + \cos 2x)^3 = 2, \text{ de unde:}$$

$$3\cos^2 2x = 0,\ \cos 2x = 0;\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6.126. Ecuaţia se mai scrie:

$$+ \operatorname{tg} (90° - x) + \operatorname{tg} x = \sin x \cdot \cos x;$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \sin x \cos x;\ \sin^2 x \cos^2 x = 1;$$

$$\text{sau } \sin 2x = \pm 2, \text{ ceea ce este imposibil.}$$

6.127. Ecuaţia se mai scrie:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^7 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^7 = \frac{169}{64} \cos^6 2x .$$

Dezvoltînd, obţinem:

$162 \cos^6 2x - 35 \cos^4 2x - 21 \cos^2 2x - 1 = 0$, cu soluţia acceptabilă

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}, \text{ de unde } x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}.$$

6.128. *Soluţia I.* Avem:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin 4x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = - \sin x, \text{ deci ecuaţia devine:}$$

$$\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x .$$

$$\sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \text{ sau}$$

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 .$$

$$x + \frac{\pi}{4} = k;\ x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2};\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Soluția II. Avem succesiv:

$$\sin^4\left(3\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left[\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\cos(3\pi-2x)-1-\cos(\pi+2x)\right]\ \left[1-\cos(3\pi-2x)+1+\right.$$

$$\left.+\cos(\pi+2x)\right]=-4\cos 2x\cos(x-2x)\ \left[1-\sin 2\pi\sin(-2\pi+2x)\right]=$$

$$=-\cos(\pi-2x)=\cos 2x,\ \text{de unde}\ \cos 2x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4x\right)\ \text{sau}$$

$$\frac{3\pi}{2}+4x+2x=2k\pi,\ \text{deci}\ x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

$$4x+\frac{3\pi}{2}-2x\ (2k+1)\pi;\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2};\ x=k\pi-\frac{\pi}{4}.$$

6.129. Ecuația devine $\sin x\ (4\cos^2 x-8\cos x-1)=0$

$$\text{cu soluțiile}\ x_1=k\pi;\ x_2=\arccos\frac{2-\sqrt{5}}{2};$$

$$x_2=(2k+1)\,180°\pm 83°13'14''\ \text{sau}$$

$$x_2=360k\pm 96°\,46'46''.$$

6.130. $4\cos^4x+4\sin^4x=4\ [(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\sin^2x\ \cos^2x]=$

$$=4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=4-2\sin^2 2x,\ \text{de unde:}$$

$$4\cos^4x+4\sin^4x=3+4\cos 4x.$$

$$2\cos(2x+30^0)\cos(2x-30^0)=\cos(2x+30^0-2x+30^0)+$$

$$+\cos(2x+30^0+2x-30^0)=\cos 60^0+\cos 4x=\frac{1}{2}+\cos 4x.$$

Ecuația devine:

$$3+\cos 4x=4\left(\frac{1}{2}+\cos 4x\right);\ \cos 4x=\frac{1}{3}.$$

$$\text{Fie}\ \alpha=\arccos\frac{1}{3},\ 4x=360k\pm\alpha$$

$$x=90k\pm\frac{\alpha}{4}.$$

6.131. Ecuația se transformă astfel:

$$\sin^3 x+\sin^2 x\cos x+\cos^3 x+\cos^2 x\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x=0$$

$$(\sin x+\cos x)\ (1+\sin x-\cos x)=0,\ \text{de unde:}$$

$$\sin x + \cos x = 0;\ \operatorname{tg} x = -1;\ x_1 = k\pi + \frac{3\pi}{4};$$

$$1 + \sin x - \cos x = 0;\ \sin x - \cos x = -1$$

$$x_2 = 2k\pi,\quad x_3 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

6.132. $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \dfrac{1 - \sin x}{2}.$

Ecuaţia dată se poate scrie:

$$\frac{1}{2} + 2^{4\sin x} = 6.16^{\frac{\sin x - 1}{2}} = 6.4^{\sin x - 1} =$$

$$= 6.2^{2\sin x - 2} = 3.2^{2\sin x - 1},\ \text{sau}\ 1 + 2.2^{4\sin x} = 3.2^{2\sin x}.$$

Notăm $2^{2\sin x} = y$

$$1 + 2y^2 - 3y = 0,\ y_1 = 1\ \text{şi}\ y_2 = \frac{1}{2}.$$

Pentru $2^{2\sin x} = 1$ rezultă $\sin x_1 = 0$; $x_1 = k\pi$.

Pentru $2^{2\sin x} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, rezultă $\sin x_2 = -\frac{1}{2}$,

deci $x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$.

6.133. $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ecuaţia dată devine:

$$2^n\sqrt{2}\left[\cos^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^n\sqrt{2}\left[\cos^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\ \text{sau}$$

$$\cos^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left[\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = \sin^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left[-\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right],$$

de unde rezultă:

$$\cos^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);\ \text{adică}\ \operatorname{tg}^{2n-3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

cu soluţia $x = k\pi$.

6.134. $\frac{4\pi}{3}\cos \pi x = k\pi (-1)^k \frac{\pi}{6}$, de unde:

$$\cos \pi x = \frac{3k}{4} + (-1)^k \frac{1}{8}; \text{ însă } |\cos \pi x| \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \frac{3k}{4} + (-1)^k \frac{1}{8} \leqslant 1; \ k = 0 \text{ și } k = 1.$$

$$k = 0, \ \cos \pi x = \frac{1}{8}; \ 2\sin \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{8} = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1, \text{ verifică.}$$

$$\pi x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1}{8}; \ x = 2k \pm \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{8},$$

$$k = 1; \ \cos \pi x = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}; \ x\pi = 2k\pi \pm \arccos\frac{5}{8}.$$

6.135. Ecuația se mai scrie în funcție de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

$$\frac{4t}{1-t^2} - \frac{1+t}{1-t} = -1 \text{ sau } t(t-1) = 0.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0, \text{ cu soluția } x_1 = k\pi,$$

iar

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1, \text{ cu soluția } x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

6.136. Avem $16\left(2\cos^2\frac{x}{3}\right) = 1 + \cos 2x$ sau

$$16\left(1 + \cos\frac{2x}{3}\right) = 1 + 4\cos\frac{2x}{3} - 3\cos^3\frac{2x}{3}.$$

Notăm $\cos\frac{2x}{3} = y$ și obținem $y^3 + 4y + 5 = 0$.

$$(y+1)(y^2 - y + 5) = 0; \ y_1 = -1; \ y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-20}}{2}$$

convine numai $y_1 = -1$, deci:

$$\frac{2x}{3} = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

$$x = \frac{3(2k+1)\pi}{2}.$$

6.137. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x; \ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$3\text{tg } x - 3\text{ctg } x - 4\sin x = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{3(\sin^2 x - \cos^2 x) - 4\sin^2 x \cos x}{\sin x \cos x} = 0,$$

dacă $\sin x \cos x \neq 0$, adică $\sin 2x \neq 0$, avem:

$$3(1 - 2\cos^2 x) - 4\cos x(1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0 \text{ sau}$$

$$(2\cos x - 1)(2\cos^2 x - 2\cos x - 3) = 0. \text{ Deci:}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0; \ \cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \text{ deoarece:}$$

$$\frac{1+\sqrt{7}}{2} > 0, \text{ de unde } x_2 = 2k\pi \pm \arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}.$$

6.138. $\sin^5 x - \cos^5 x = \text{cosec } x - \sec x = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x}$,

$$\sin^5 x - \cos^5 x = (\sin x - \cos x)(\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + $$
$$+ \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = (\sin x - \cos x)[(\sin^2 x +$$
$$+ \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x)] =$$
$$= (1 - \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x) \cdot (\sin x - \cos x). \text{ Obținem:}$$

$$\sin x - \cos x = 0 \text{ și}$$

$$1 + \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x = \frac{-1}{\sin x \cos x}.$$

Deci:

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot \sin(90° - x) = 0 \text{ sau}$$

$$2\sin(x - 45°)\cos 45° = 0; \qquad x - 45° = 180k;$$

$$x_1 = 180k + 45°.$$

A doua ecuație pentru $\sin x \cos x \neq 0$ se mai scrie

$$\sin^3 x \cos^3 x - \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x - 1 = 0,$$

$$\frac{\sin^3 2x}{8} - \frac{\sin^2 2x}{4} - \frac{\sin^2 2x}{2} - 1 = 0 \text{ sau}$$

$$\sin^3 2x - 2\sin^2 2x - 4\sin 2x = 8, \text{ ceea ce este imposibil.}$$

6.139. Notăm $\text{tg } 2x = y$; $1 - y^2 + 2y = 0$; $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$1 - y^2 - 2y = 0$; cu $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Studiem expresia pe intervalele următoare:

1°. Dacă $y \in (-\infty, -1, -\sqrt{2})$, avem ecuația:

$$-1 + y^2 - 2y - 1 + y^2 + 2y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sau } y^2 - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \ y_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}+3}{3},$$

rădăcini care nu sînt în intervalul considerat.

2. Pentru $y \in (-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$, ecuația devine:

$$1 - y^2 + 2y + 1 - y^2 - 2y = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sau tg } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \ 2x = 180k - 30° \ \text{ sau } x = 90\,k - 15°$$

3. Pentru $y \in (1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ avem:

$$1 - y^2 + 2y + 1 - y^2 - 2y = 2 - 2y^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \ y^2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{3},$$

care nu dă soluții reale pentru y.

4. Pentru $y \in (-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ avem:

$$-1 + y^2 + 2y + 1 + 2y - y^2 = 4y = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \ y = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg } 2x;$$

$$2x = 180°\,k + 30°; \ x = 90k + 15°.$$

5. Pentru $y \in (1+\sqrt{2}, \infty)$ obținem:

$$-1 + y^2 - 2y - 1 + y^2 + 2y = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \ y^2 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \cong$$

$$\cong 2{,}15; \ y \cong \pm\sqrt{2{,}15},$$

deci în afara intervalului considerat.

În total avem $x = 90°\,k \pm 15°$, de unde în intervalul $(0, 360°)$ avem $x = 15°; 75; 105°; 165°; 195°; 255°; 285°, 345°$.

6.140. Ecuația se mai scrie $\text{tg } 5x = \text{ctg } x$ sau

$$\text{tg } 5x - \text{tg } (90 - x) = 0.$$

6.141. Numărătorul nu poate fi nul decît dacă:

$\sin 15\,x = 1$ și $\cos(20\,x + 60°) = -1$ sau

$\sin 15\,x = -1$ și $\cos(20\,x + 60°) = 1$, însă:

pentru soluțiile găsite numitorul să fie diferit de zero.

6.142. $\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$. Ecuaţia devine:

$$\frac{4 - 3\sin^2 2x}{(4 - \sin^2 2x)^2} = \frac{28}{169};\ \sin^2 2x = \frac{3}{4} \text{ sau}$$

$$\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ de unde } 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$x = k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

6.143. Înmulţim cu 4 sin x şi obţinem ecuaţia:

$$\sin 4x = \sin x, \text{ de unde } x_1 = \frac{2k\pi}{3} \text{ şi } x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{5},$$

însă trebuie excluse rădăcinile care verifică $x = k\pi$, deoarece am înmulţit cu sin x. Pentru $k = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{5}$ corespunzător cu 36°, deci $\cos 36° \cos 72° = \frac{1}{4}$, deoarece $72° = 2 \times 36°$, relaţia precedentă devine

$$8\cos^3 36° - 4\cos 36° - 1 = 0.$$

Notînd $\cos 36° = y$, ecuaţia $8y^3 - 4y - 1 = 0$ are rădăcinile $y_1 = -\frac{1}{2}$,

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ şi } y_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Primele două rădăcini nu corespund, deoarece $\cos 36° > 0$, rezultă deci $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

6.144. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$.

Notăm $\sin^2 x = \frac{z}{4}$ şi obţinem:

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = (z-1)(z^2 - 5z + 7) = 0$$

$z_1 = 1$, iar z_2 şi z_3 sînt imaginare.

$$\sin^2 x = \frac{1}{4};\ \sin x = \pm\frac{1}{2};\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

7.1. Se aplică sinusul la prima ecuație și se ține seama de ecuația a doua:

$$x = \frac{\pi}{4}(2k + 1); \quad y = \frac{\pi}{4}(1 - 2k).$$

7.2. Se înlocuiesc sumele de funcții trigonometrice prin produse. Apoi din prima ecuație avem:

$$x + y = 2k\pi \text{ și } x - y = (2k + 1)\pi$$

Se cercetează apoi ecuația a doua cu cele două rezultate obținute de la prima ecuație și se obține $x - y = 2k\pi$ pentru cazul $x + y = 2k\pi$ (k și k' fiind de aceeași paritate). Cazul $(x - y) = (2k + 1)\pi$ duce la un rezultat imposibil $(0 = 1)$.

$$x = (k + k')\pi \text{ și } y = (k - k')\pi.$$

7.3. Se aplică formulele de transformare în produse și se ține seama că $\sin 50° = 2\sin 25° \cos 25°$; $1 + \cos 50° = 2\cos^2 25°$.

Se împart apoi ecuațiile obținute.

$$\begin{cases} x = 2k' \cdot 180° + 50° \\ y = 2k'' \cdot 180° \end{cases} \text{ sa } \quad \begin{cases} x = 2k'' 180° \\ y = 2k'' 180° - 50°. \end{cases}$$

7.4. Se adună și se scad ecuațiile și se obține sistemul:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ de unde } \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \\ x = 2k'\pi - \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

7.5. Se înlocuiește $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y}$ și se ține seama de ecuația a doua

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \quad y = 2k'\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

7.6. Se dezvoltă $\operatorname{tg}(x + y)$ din ecuația a doua și se ține seama de prima ecuație. Se obține

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{4}.$$

Avînd suma și produsul a două necunoscute, se formează o ecuație de gradul doi, care se rezolvă:

$$x = y + k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

7.7. Se exprimă totul în $\operatorname{tg} x$. Se obține:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{și } \operatorname{tg} y = \sqrt{3}, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{6}; \quad y = k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

7.8. Ecuația a doua se poate scrie:

$$\frac{1 - \cos 2y}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{și duce la ecuația:}$$

$2 \cos (x + y) \cos (x - y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se ține apoi seama de prima ecuație.

$$\begin{cases} x = k \cdot 180° + 75° \\ y = -k \cdot 180° + 45° \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = k \,.\, 180° + 45° \\ y = -k \,.\, 180° + 75° \end{cases}$$

7.9. Se înlocuiește în ecuația a doua $\sin^2 x$ și $\sin^2 y$ în funcție de $\cos 2x$ și $\cos 2y$,

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}; \quad y = k'\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

7.10. Din prima ecuație avem:

$$x = \frac{\pi}{2} - y, \text{ deci } 2x = \pi - 2y \text{ și deci}$$

$$\sin 2x = \sin 2y, \text{ care cu ecuația a doua dă sistemul}$$

$$\sin 2x = \sin 2y; \ \sin 2x = 2\cos^2 y \text{ și de aici:}$$

$$\sin 2y - 2\cos^2 y = 0, \text{ ecuație ușor de rezolvat:}$$

$$x_1 = -k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} - k'\pi.$$

$$y_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad y_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

7.11. Se transformă membrul întîi al ecuației a doua în produs și se ține seama de prima ecuație. Se obține:

$\cos (x - y) = \frac{1}{2}$ și avînd apoi și $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$, ecuațiile obținute se rezolvă ușor.

$$x = 45°; \ y = -15° \text{ sau } x = 45°; \ y = 105°.$$

7.12. Se exprimă totul în $\sin x$ şi se obţine ecuaţia:

$$8 \sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \text{ cu soluţiile:}$$

$$\sin x = -1, \ \sin x = \frac{1}{2}; \ \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Soluţia $\sin x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ nu este admisă.

7.13. În ecuaţia a doua se exprimă totul în funcţie de $\cos x$ şi $\cos y$ şi se ţine seama apoi de prima ecuaţie.

Se obţine:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \ y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ sau}$$

$$x = 2k'\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ y = 2k'\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

7.14. Se exprimă totul în $\cos x$ şi $\cos y$.

Se obţine ecuaţiile: $\cos x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7.15. În prima ecuaţie se exprimă totul în $\sin x$ şi $\sin y$; se ţine seama de ecuaţia a doua şi se obţine:

$$\sin x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4a}; \ \sin y = \frac{a}{2} - \frac{b}{4a}.$$

7.16. Se ţine seama că $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3}$; se transformă în membrul întîi al ecuaţiei a doua în produs.

$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi, \\ y_1 = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2k'\pi - \dfrac{\pi}{6}, \\ y_2 = 2k'\pi + \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

7.17. Se aplică tangenta în ambii membri ai primei ecuaţii şi se ţine seama că:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{4} [(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2]$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}; \ y = k\pi + \frac{\pi}{6}.$$

7.18. Se exprimă totul în $\operatorname{tg} x$ şi $\operatorname{tg} y$. Se obţin apoi ecuaţiile:

$$\operatorname{tg} x_1 = 0; \ \operatorname{tg} y_1 = 1; \qquad \operatorname{tg} x_2 = 1; \ \operatorname{tg} y_2 = 0.$$

7.19. Se transformă sumele în produse de linii trigonometrice; apoi se împart ecuaţiile şi din discuţia soluţiilor obţinute reiese că:

$$-2 \leqslant m \leqslant 2.$$

7.20. Se presupune $a \neq 1$ şi se formează proporţia:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Se aplică formulele de transformare în produse şi se obţine sistemul:

$$x + y = b; \ \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \frac{a+1}{a-1}. \qquad (2)$$

Se pot introduce soluţii străine; acestea vor fi toate soluţiile sistemului (2) pentru care $\sin y = 0$, adică $y = k\pi$. Dar dacă sistemul are soluţii de forma $y = k\pi$, $x = b - k\pi$, atunci:

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Considerăm următoarele cazuri:

Cazul I. $b \neq n\pi$. Din ecuaţia a doua se obţine $(x - y)$ şi se formează un sistem liniar în x şi y.

Cazul II. $b = n\pi$, $n = 2m$, şi $a \neq -1$.

În acest caz, atît sistemul (2) cît şi sistemul (1) sînt incompatibile.

Cazul III. $b = 2m\pi$, $a = -1$. Sistemul (2) admite soluţia generală $x = 2m\pi - y$ unde y este un număr arbitrar. Pentru obţinerea soluţiei generale trebuie eliminate soluţiile de forma $y = k\pi$ (unde k este un număr întreg arbitrar).

Cazul IV. $b = (2m + 1)\pi$. În acest caz nu se poate trece de la sistemul (1) la sistemul (2), întrucît $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ nu are sens, iar sistemul (1) devine $\frac{\sin x}{\sin y} = a$; $y = -x + (2m + 1)\pi$ şi fiindcă $\sin x = a \sin y$, însă (prin ipoteză) $a \neq 1$, sistemul este incompatibil.

Observaţie. Prin acelaşi procedeu se rezolvă şi se studiază şi următoarele sisteme:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = a, \quad \frac{\sin x}{\cos y} = a \quad \left(\text{punîndu-se } y = \frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$x \pm y = b, \qquad x \pm y = b.$$

7.21. Sistemul se scrie:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad \frac{\cos x}{\cos y} = b.$$

Din care se deduc următoarele sisteme echivalente:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{a-1}{a+1}; \quad \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{b-1}{b+1}.$$

Se aplică formulele de transformare în produse şi de aici sistemul

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x-y}{2} = \frac{(a-b)(1-b)}{(a+1)(b+1)}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2} = \frac{(a+1)(1-b)}{(a-1)(1+b)}.$$

Discuţie. Sistemul obţinut este posibil numai dacă cel puţin una din formele care dau $\operatorname{tg}^2 \frac{x-y}{2}$ sau $\operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2}$ este pozitivă, adică dacă:

$$\frac{(a-1)(1-b)}{(a+1)(1+b)} > 0.$$

Din condiţia pusă reiese următoarele:

1°. Dacă $a^2 < 1$ va trebui ca să avem $b^2 > 1$.

2°. Dacă $a^2 > 1$ va trebui să avem $b^2 < 1$.

7.22. Se adună şi se scad ecuaţiile membru cu membru şi se obţine sistemul:

$$\cos(x+y) = b-a; \ \cos(x-y) = b+a. \qquad (2)$$

Acest sistem are soluţii dacă şi numai dacă a şi b satisfac inegalităţile:

$$-1 \leqslant b-a \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant b+a \leqslant 1$$

din care obţinem, respectiv:

$$a-1 \leqslant b \leqslant a+1$$
$$-a-1 \leqslant b \leqslant -a+1.$$

Mulţimea $M(a, b)$ din plan, care satisface ambele inegalităţi, formează un pătrat. Avem în acest caz:

$$-a-1 \leqslant b < a+1; \quad -1 \leqslant a \leqslant 0, \qquad (3)$$
$$a-1 \leqslant b \leqslant -a+1; \quad 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Dacă valorile parametrilor a şi b satisfac condiţiile (3), atunci sistemul trigonometric este echivalent cu următorul sistem de două ecuaţii liniare cu doi parametri întregi:

$$x+y = \pm \arccos(b-a) + 2m\pi$$
$$x-y = \pm \arccos(b+a) + 2n\pi,$$

unde m şi n sînt numere întregi arbitrare. Apar în soluţii suma $(m+n)$ şi diferenţa $(m-n)$.

Putem introduce în loc de $(m+n)$ şi $(m-n)$ alţi parametri, punînd $m+n = k$, $m-n = l$, dar atunci k şi l nu pot fi numere întregi arbitrare, ci trebuie să fie de aceeaşi paritate, adică sau ambele pare sau ambele impare, deoarece numai în aceste condiţii numerele m şi n vor fi întregi.

7.23. Se substituie $\operatorname{tg} x = u$ şi $\operatorname{tg} y = v$ şi se obţine ecuaţia

$$apu^2 + (bn - am - cp)n + mc = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să aibă soluţii este:

$$(bn - am - cp)^2 - 4acmp \geqslant 0.$$

7.24. Prima ecuație se poate scrie:

$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos b+\cos(x-y)} = a \text{ și deci sistemul}$$

$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos b+\cos(x-y)} = a; \quad x+y=b.$$

Prima ecuație se poate scrie:

$$2\sin(x-y) - a\cos(x-y) - a\cos b = 0, \tag{1}$$

o ecuație liniară în raport cu $\sin(x-y)$ și $\cos(x-y)$, din care aflăm pe $(x-y)$ și apoi sistemul este ușor de rezolvat.

Prin trecerea la ecuația (1) pot fi introduse soluții străine care satisfac condiția:

$$\cos(x-y) = -\cos b,$$

de unde $\cos(x-y) = \cos(\pi+b)$ și

$$x-y = \pm(b+\pi)+2k\pi \text{ sau } x-y = \pm b+(2k+1)\pi.$$

Substituind în ecuația (1), obținem:

$$\sin b = 0, \text{ și } b = n\pi.$$

Dacă $b = n$, atunci sistemul dat devine:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad (n \text{ este număr întreg}),$$
$$x+y = n\pi$$

de unde

$$2\operatorname{tg} x = a, \quad y = n\pi - x.$$

$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{2}+k\pi; \; y = -\operatorname{arctg}\frac{a}{2}+(n-k)\pi.$$

În mod analog se rezolvă și se discută sistemele:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a; \\ x \pm y = b. \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

7.25. Se introduc necunoscute noi:

$$\operatorname{tg} x = u, \; \operatorname{tg} y = v$$

și se obține sistemul algebric

$$\begin{cases} u+v = a; \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v} = b, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y+v = a, \\ \dfrac{a}{u\cdot v} = b. \end{cases} \tag{2}$$

de unde $a = b\,.\,u\,.\,v$ și dacă $b \neq 0$, atunci u și v sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea:

$$bz^2 - abz + a = 0. \tag{3}$$

Acest procedeu de rezolvare poate introduce rădăcini străine; rădăcina străină este acea soluție pentru care $u = 0$ sau $v = 0$. Ecuația (3) are o rădăcină egală cu zero numai în cazul $a = 0$.
Așadar, trebuie să fie special examinate următoarele cazuri:

Cazul I. $b = 0$, $a \neq 0$; în acest caz, sistemul (2), precum și sistemul (1) sînt incompatibile.

Cazul II. $a = 0$, $b \neq 0$; în acest caz, sistemul este incompatibil.

Cazul III. $a = b = 0$; sistemul (2) are o mulțime infinită de soluții $v = -u$, unde u este un număr arbitrar diferit de zero. În acest caz, soluția generală a sistemului trigonometric este dată de formula $y = -x + k\pi$, unde x este un număr arbitrar diferit de numerele de forma $n\frac{\pi}{2}$.

7.26. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și

$$2\sin x = \cos y, \text{ rezultă:}$$

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{20 - 8\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{20 - 8\sqrt{2}}}{20 - 8\sqrt{2}} = \frac{(5 + 2\sqrt{2})\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{17}.$$

cunoscînd pe x, aflăm pe $y = 45° - x$.

7.27. $\sin y = 1 - \sin x$; $\pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = 1 - \sin x$

$$\cos^2 y = \left(\frac{3}{2} - \cos x\right)^2 = \frac{9}{4} - 3\cos x + \cos^2 x,$$

$$1 - \cos^2 y = (1 - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x + \sin^2 x.$$

$$1 - \frac{9}{4} + 3\cos x - \cos^2 x = 1 - 2\sin x + \sin^2 x \text{ sau}$$

$$12\cos x + 8\sin x - 13 = 0. \text{ Notăm } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$12\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 8\frac{2t}{1 + t^2} - 13 = 0;\ 25t^2 - 16t + 1 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 25}}{25} = \frac{8 \pm \sqrt{39}}{25}.$$

7.28. Notăm $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$; și avem $\sin 2x = \frac{2u}{1 + u^2}$; $\sin 2y = \frac{2v}{1 + v^2}$. Se rezolvă apoi sistemul:

$u + v = \frac{4}{3}$ și $\frac{u}{1 + u^2} + \frac{v}{1 + v^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care se reduce la un sistem de gradul doi.

7.29. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = v$. Avem:

$$u + v = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ și } \frac{u}{1 - u^2} + \frac{v}{1 - v^2} = \sqrt{3}.$$

A doua ecuație se mai scrie:

$$\frac{u + v - uv(u + v)}{1 - (u + v)^2 + 2uv + u^2v^2} = \sqrt{3} \text{ sau}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}(1 - uv) = \sqrt{3}\left(u^2v^2 - 2uv - \frac{1}{3}\right),$$

$$3u^2v^2 + 8uv - 3 = 0, \text{ de unde } uv = \frac{1}{3}$$

și $uv = -3$. Formăm sistemele:

$$u + v = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ și } uv = \frac{1}{3} \text{ care dă:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = 360\,k_1 + 60°$$

$$y = 360\,k_2 + 60° \text{ și sistemul:}$$

$$u + v = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ și } uv = -3, \text{ care se rezolvă analog.}$$

7.30. Sistemul se mai scrie:

$$\sin x = \sqrt{2}\sin y; \quad \sqrt{3}\sin x\cos x = 2\sin y\cos y.$$

Înlocuim pe $\sin x$ din prima în a doua ecuație și obținem $\sqrt{6}\sin y\cos x = 2\sin y\cos y$, de unde $\sin y = 0$, $\sin x = 0$; $x = k_1\pi$, $y = k_2\pi$ și $\sqrt{6}\cos x = 2\cos y$; $\sin x = \sqrt{2}\sin y$.

Se observă că $\sin x$ și $\sin y$ au același semn; $\cos x$ și $\cos y$, iar nu același semn, deci x și y se află ambele în cadranul I sau III. Ridicăm la pătrat și obținem:

$$6\cos^2 x = 4\cos^2 y \text{ și } \sin^2 x = 2\sin^2 y \text{ sau}$$

$$\text{notînd } \sin^2 x = u \text{ și } \sin^2 y = v \text{ avem:}$$

$$6u - 4v = 2 \text{ și } u - 2v = 0, \text{ deci:}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ și } \sin^2 y = \frac{1}{4},$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin y = \pm\frac{1}{2},$$

$$x = 180\,k + 45°, \quad y = 180°k + 30°,$$

k fiind același întreg și pentru x și pentru y, pentru a fi x și y fie în cadranul I, fie în cadranul III.

7.31. Prima ecuaţie se mai scrie:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos y = \frac{m}{a}; \text{ Notăm } \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Ecuaţia a doua devine:

$$\sin (x + \varphi) = \frac{m}{a} \cos \varphi; \text{ de unde:}$$

$$x = \arcsin \left(\frac{m}{a} \cos \varphi\right) - \varphi \text{ şi } y = n\pi + \varphi - \arcsin \left(\frac{m}{a} \cos \varphi\right).$$

7.32. $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \dfrac{b + c}{b - c}$; $\dfrac{\sin (x + y)}{\sin (x - y)} = \dfrac{b + c}{b - c}$

$$\sin (x + y) = \frac{b + c}{b - c} \sin a = \sin \alpha.$$

Pentru a fi compatibil, este necesar să avem:

$$-1 < \frac{b + c}{b - c} \sin a < 1. \text{ Sistemul devine } x - y = a;$$

$$\sin (x + y) = \sin \alpha \text{ sau}$$

$$x - y = a;\ x + y = \alpha + 2k\pi;\ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\text{de unde } x = k\pi + \frac{a + \alpha}{2};\ y = k\pi + \frac{\alpha - a}{2}.$$

7.33. $\sin x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} \sqrt{\dfrac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$; $\sin y = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} \sqrt{\dfrac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$.

7.34. Mai putem scrie:

$$\sin^3 x + \sin^3 y = (\sin x + \sin y) \cdot \frac{(\sin x + \sin y)^2 + 3 (\sin x - \sin y)^2}{4} =$$

$$= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \left(\sin^2 \frac{x + y}{2} \cos^2 \frac{x - y}{2} + 3 \sin^2 \frac{x - y}{2} \cos^2 \frac{x + y}{2}\right).$$

$$\cos^3 x + \cos^3 y = (\cos x + \cos y) \cdot \frac{(\cos x + \cos y)^2 + 3 (\cos x - \cos y)^2}{4} =$$

$$= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \left(\cos^2 \frac{x + y}{2} \cos^2 \frac{x - y}{2} + 3 \sin^2 \frac{x + y}{2} \sin^2 \frac{x - y}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos^3 \frac{x + y}{2} \cos^3 \frac{x - y}{2} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x + y}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2}\right). \text{ Împărţind, avem}$$

sistemul

$$\operatorname{tg}^3 \left(\frac{x + y}{2}\right) \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{x + y}{2}}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x + y}{2}} = \sqrt{3};\ 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2} = 1, \text{ sau}$$

$$\operatorname{tg}^3\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\frac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}=\sqrt{3};\ \text{de unde}\ \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\sqrt{3}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{\pi}{3}\right);\quad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\pm\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\left(k\pi\pm\frac{\pi}{6}\right),$$

deducem

$$x+y=360\,k+120^\circ$$
$$x-y=360\,k_1\pm 60^\circ$$

$$x=(k+k_1)\,180^\circ+60^\circ\pm 30^\circ \text{ și } y=(k-k_1)\,180^\circ+60^\circ\mp 30^\circ.$$

7.35. Din ecuația a doua obținem $\operatorname{tg} y=1$.

Ecuația întîi devine $(\sin x-1)^3=0$; $x=360k+90^\circ$.

7.36.

x	$\frac{5\pi}{44}$	$\frac{\pi}{44}$	$\frac{17\pi}{44}$	$\frac{13\pi}{44}$
y	$\frac{3\pi}{44}$	$\frac{5\pi}{44}$	$\frac{19\pi}{44}$	$\frac{28\pi}{44}$

7.37. Notăm $\sin^{\operatorname{ctg} y} x=u$; $\operatorname{tg}^{\operatorname{cosec} x} y=v$.

Formăm sistemul $u^3+v^3=\frac{9}{8}$; $u^2-uv+v^2=\frac{3}{4}$ cu soluțiile $u=1$; $v=$ $=\frac{1}{2}$ sau $u=\frac{1}{2}$, $v=1$.

Obținem sistemele: 1°) $\operatorname{ctg} y \log\sin x=0$ și $\operatorname{cosec} x\log\operatorname{tg} y=-\log 2$, de unde $\operatorname{ctg} y=0$, $\sin x=1$, însă $\operatorname{ctg} y=0$ nu verifică ecuația a doua, rămînînd soluțiile:

$$\sin x=1,\ x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ și } \operatorname{tg} y=\frac{1}{2};\ y_1=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

$$2°)\ \operatorname{ctg} y\sin x=-\log 2 \text{ și } \operatorname{cosec} x\log\operatorname{tg} y=0$$

și avem $\sin x=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} y=1$, de unde:

$$x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3} \text{ și } y_2=k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

7.38. Prima relație se mai poate scrie:

$$\cos(7x-a)+\cos(3x-a)=\sqrt{2}\cos(5x-a),\ \text{sau}$$

$$2\cos(5x-a)\cos 2x=\sqrt{2}\cos(5x-a),\ \text{de unde:}$$

$$\cos(5x-a)=0;\ 5x-a=180k+90^\circ \text{ și } \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de unde $x=180\,k+22^\circ30'$.

Relaţia a doua devine:

$$\cos(6x - a) + \cos(4x - a) = y\cos(5x - a) \text{ sau}$$

$$2\cos(5x - a)\cos x = y\cos(5x - a).$$

Pentru $\cos(5x - a) = 0$; y poate fi oricare.

Pentru $y = 2\cos x$ obţinem:

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

7.39. Înmulţim prima ecuaţie cu $-2\cos a$ şi o adunăm la a doua şi obţinem:

$$y(\sin 4a - 2\sin 2a\cos a) = \sin 6a - 2\sin 3a\cos a;$$

$$y\sin 2a(\cos 2a - \cos a) = \sin 3a(\cos 3a - \cos a),$$

$$y\sin 2a\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} = \sin 3a\sin 2a\sin a.$$

Dacă $\sin\frac{a}{2} \neq 0$, atunci şi $\sin\frac{3a}{2} \neq 0$; $\sin 2a \neq 0$,

$$y = 4\cos\frac{3a}{2}\cos\frac{a}{2}; \quad x = -2\cos\frac{3a}{2}\sin\frac{5a}{2}.$$

Dacă $\sin a = 0$, sau $a = k\frac{\pi}{2}$, sau $a = 2k\frac{\pi}{3}$, sistemul admite o infinitate de soluţii şi y poate lua orice valori.

7.40. $\frac{\cos 2y - 1}{\sin 2y} = \frac{-2\sin^2 y}{2\sin y\cos y} = -\frac{\sin y}{\cos y}$; $\sin y \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Prima ecuaţie devine succesiv:

$$\sin 2x + \cos 2x = \cos y + \sin y$$

$$\sin 2x - \sin y = \cos y - \cos 2x \text{ sau}$$

$$2\sin\frac{2x - y}{2}\cos\frac{2x + y}{2} = 2\sin\frac{2x - y}{2}\sin\frac{2x + y}{2},$$

de unde:

$$\sin\frac{2x - y}{2} = 0 \text{ şi } \operatorname{tg}\frac{2x + y}{2} = 1 \text{ (independente).} \quad (1)$$

Ecuaţia a doua din enunţ se mai scrie:

$$\sin(2x + 2y) - \sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2\sin y\cos(2x + y) = \frac{1}{2}; \quad \cos(2x + y) = \frac{1}{4\sin y}. \quad (2)$$

Din tg $\frac{2x+y}{2} = 1$ obținem $\frac{2x+y}{2} = 180\,k + 45°$.

$$2x + y = 360k + 90°$$

$$\cos(2x + y) = \cos(360\,k + 90°) = 0, \text{ însă din} \qquad (2)$$

$$\cos(2x + y) = \frac{1}{4\sin y} = 0, \text{ ceea ce este imposibil.}$$

Rămîne sistemul:

$$\sin\frac{2x-y}{2} = 0, \text{ și } \cos(2x + y) = \frac{1}{4\sin y} \text{ din (2). Rezultă:}$$

$$\frac{2x-y}{2} = 180k;\quad 2x - y = 360\,k, \text{ de unde:}$$

$$\sin y = \sin 2x \text{ și } \cos 2x = \cos y.$$

$$\cos(2x + y) = \cos 2x \cos y - \sin 2x \sin y =$$

$$= \cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y = \frac{1}{4\sin y}.$$

$$2x + y = 2y + 360k;\quad 2\sin^2 y - 1 + \frac{1}{4\sin y} = 0,$$

$$8\sin^3 y - 4\sin y + 1 = 0 \text{ cu o rădăcină } \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$8\sin^3 y - 4\sin y + 1 = (2\sin x - 1)(4\sin^2 y + 2\sin y - 1) = 0.$$

Avem $\sin x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 360\,k + 90° \pm 60°$.

$$y_1 = 360\,k_1 + 2x = 360\,k + 180° \pm 120°.$$

$$4\sin^2 y + 2\sin y - 1 = 0, \text{ ne dă } \sin y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{cu } y_2 = 360\,k + 90° \pm 54°;\quad x_2 = 180\,k + \frac{y}{2}$$

$$x_2 = 180\,k + 45° \pm 27°.$$

$$\sin y_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4};\quad y_3 = 360\,k - 90° \pm 18°$$

$$x_3 = 180\,k + \frac{y}{2} = 180\,k - 45° \pm 9°.$$

7.41. $-\sin(-x + a) + \cos(y - a) = 0$

$$-\cos(90° + x - a) + \cos(y - a) = 0, \text{ de unde:}$$

$$\sin\frac{x+y-2a+90°}{2}\ \sin\frac{y-x+90°}{2} = 0.$$

1. $x + y - 2a + 90 = 360\,k$

$$y = 2a - x - 90 + 360\,k = 2a - x + (4k - 1)\,90°.$$

Ecuaţia a doua devine:

$$\sin(x + a) + \cos(3a - x - 90°) = \sin(x + a) + \sin(3a - x) =$$
$$= 2\sin 2a \cos(x - a) = \sin 2a,$$

de unde sau $\sin 2a = 0$, x oricare sau $\sin 2a \neq 0$ şi

$$\cos(x - a) = \frac{1}{2}; \quad (\alpha \neq 90°k)$$
$$x - a = 360\, k_1 \pm 60°, \quad x = 360\, k + a \pm 60°$$
$$y = a + 360\, k_2 - 90° \pm 60°.$$

7.42. $\arcsin \frac{5}{\sqrt{61}} = \arccos \sqrt{1 - \frac{25}{61}} = \arccos \frac{6}{\sqrt{61}}$;

$$\operatorname{arc\,tg}(x + 3y) + \operatorname{arc\,tg}(x - y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{6}.$$

Aplicînd tangenta, obţinem:

$$\frac{3 + 3x + x - y}{1 - (x + 3y)(x - y)} = \frac{5}{6}, \text{ însă } y = 7 - 2x, \text{ deci:}$$
$$75x^2 - 478x + 656 = 0, \text{ de unde:}$$
$$x_1 = \frac{328}{75}; \; x_2 = 2, \; y_1 = \frac{-131}{75}, \; y_2 = 3.$$

7.44. Avem $\sin 2x = \cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$ sau,

$$\sin 2x\,(1 + 2\sin x) = 0, \text{ de unde } x_1 = 90\, k,$$
$$x_{2,3} = 360\, k + 90° \pm 120°.$$

A doua ecuaţie se mai scrie:

$$\cos(x + y) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin(x - y) = 1 \text{ sau}$$
$$\cos(x + y) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin(x + y) = \cos \frac{\pi}{3};$$
$$\cos\left(x + y - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \text{ sau } x + y = \frac{2\pi}{3}.$$
$$y_1 = 120° + 90\, k; \; y_2 = 360\, k - 90°; \; y_3 = 360\, k - 150°.$$

7.45. Ridicăm prima ecuaţie la pătrat şi verificăm soluţiile aflate.

$$4 \sin^2 x = \sin^2 y, \text{ sau } 4(1 - \cos^2 x) = 1 - \cos^2 y;$$
$$4 \cos^2 x - \cos^2 y = 3. \text{ Notăm } \cos x = u \text{ şi } \cos y = v,$$
$$4u^2 - v^2 = 3; \; 2u + v = \sqrt{3}, \text{ de unde obţinem:}$$
$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ şi } v = 0, \text{ adică } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \cos y = 0.$$

din valorile $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ şi $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$,

verifică soluţiile sistemului

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}; \; y_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ şi}$$

$$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}; \; y_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

7.46. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$; $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = v$, avem:

$$u + v = b.$$

$$\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2v}{1+v^2} = a \text{ sau}$$

$$\frac{(u+v)(1+uv)}{u^2v^2+(u+v)^2-2uv+1} = \frac{b(1+uv)}{u^2v^2+b^2-2uv+1} = \frac{a}{2},$$

$$uv = \frac{a+b\pm\sqrt{b(2a+b)}}{a}; \; b(2a+b) \geqslant 0.$$

asociind şi ecuaţia $u + v = b$, avem suma şi produsul rădăcinilor, deci rezultă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

7.47. Notăm $\sin^2 x = u$, $\sin^2 y = v$, $\sin^2 z = w$.

$$u - uv = a; \; v = \frac{u-a}{u} = 1 - \frac{a}{u},$$

$$w = \frac{v-a}{v} = \frac{u-a-au}{u-a} = 1 - \frac{au}{u-a}.$$

Introducem valorile lui u şi w în ecuaţia:

$$w + wu = a \text{ şi avem}$$

$$\frac{(a-1)(u^2-u+a)}{u-a} = 0.$$

Pentru $u = \alpha$ avem $v = \frac{1}{\alpha}$ şi $w = \frac{1}{1-\alpha}$.

Inegalităţile $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha} \leqslant 1; \; 0 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \leqslant 1,$$

nu pot avea loc simultan, deci sistemul este imposibil.

Pentru $u = a \neq 0$, avem $v = 0$, $w = -\infty$.

Dacă $u = a = 0$ avem $u = v = w = 0$.

Pentru $u^2 - u + a = 0$ avem:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

a şi u fiind pozitive subunitare.

Este necesar să avem $1 - 4a \geqslant 0$, adică:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}\ ; \ v = 1 - \frac{2a}{1 \pm \sqrt{1-4a}}$$

$$w = 1 - \frac{a\left(1 \pm \sqrt{1-4a}\right)}{1 \pm \sqrt{1-4a} - 2a}.$$

Pentru $a = 0$, avem $u = v = w = 0$ și $u = v = w = 1$.

Pentru $a = \frac{1}{4}$ avem $u = v = w = \frac{1}{2}$, pentru $a = \frac{1}{8}$ avem:

$$u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ; \ v = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} \pm 1\right)}\ ;$$

$$w = 1 - \frac{\sqrt{2} \pm 1}{6\sqrt{2} \pm 8}$$

u, v, w pot avea pe rînd una din valorile aflate.

7.48. Notăm cu λ valoarea comună a rapoartelor:

$$x = \lambda \sin z,\ y = \lambda \sin 3z,\ a = \lambda \sin 2z$$

$x + y = 2\lambda \sin 2z \cos z$. Înlocuim în celelalte două egalități, obținem:

$$\frac{\sin z}{\sin 2z} = \frac{\sin 2z}{2 \sin 2z \cos z} = \frac{\sin 3z}{\sin 2z\,(2\cos^2 z + \cos 2z)};$$

care este într-adevăr o identitate, deoarece:

$$\frac{\sin x}{\sin 2z} = \frac{1}{2\cos z}\ ; \ \frac{\sin 2z}{2 \sin 2z \cos z} = \frac{1}{2\cos z}\ ;$$

$$\frac{\sin 3z}{\sin 2z\,(\cos^2 z + \cos 2z)} = \frac{\sin z\,(3\cos^2 z - \sin^2 z)}{2 \sin z \cos z\,(3\cos^2 z - \sin^2 z)} = \frac{1}{2\cos z}.$$

Sistemul este compatibil și are ca soluții:

$x = \lambda \sin z$; $y = \lambda \sin 3z$, unde $z = \frac{1}{2} \arcsin \frac{a}{\lambda}$, iar $|\lambda| > |a|$.

Dacă $\sin 2z = \frac{a}{\lambda}$; $\cos 2z = \frac{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}{\lambda}$

$$\sin z = \sqrt{\frac{1 - \cos 2z}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2}}{2\lambda}},$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{\lambda + a} - \sqrt{\lambda - a}\right)$$

$$\text{și } y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \cdot \left(\sqrt{\lambda + a} - \sqrt{\lambda - a}\right)\left(2\sqrt{\lambda^2 - a^2} + \lambda\right).$$

7.49. $x = A + B \cos B_1 + C \sin \theta_1,$

$y = A + B \cos \theta_2 + C \sin \theta_2,$

$z = A + B \cos \theta_3 + C \sin \theta_3$

7.51. Prima ecuaţie $\operatorname{tg}(x+y+z) = 0$ ne dă:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 0.$$

Înlocuind $\operatorname{tg} x$ şi $\operatorname{tg} z$ în funcţie de $\operatorname{tg} y$, obţinem:

$$\operatorname{tg} y\,(11 - 4 \operatorname{tg}^2 y) = 0, \text{ de unde:}$$

$$y = 180\,k \text{ şi } y_2 = 360k \pm 31°5'3''$$

7.52. Se obţine sistemul:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2;\ \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z = 1,\ \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x = 4,$$

de unde $\operatorname{tg} x = \frac{7}{2}$; $\operatorname{tg} y = \frac{3}{2}$ şi $\operatorname{tg} z \frac{1}{2}$.

7.53. Se ridică prima ecuaţie la pătrat, se ţine seama de ecuaţia a doua şi se obţine:

$$x = 5,\ y = 6,\ z = 2\,k\,\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ sau:}$$

$$x = 6,\ y = 5,\ z = 2\,k\,\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

7.54. Se descompun membrii întîi ai ecuaţiilor în factori, se aplică apoi formulele de transformare în produse şi se ţine seama că:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha.$$

Se înmulţesc apoi ecuaţiile obţinute membru cu membru şi ecuaţia astfel obţinută se împarte cu fiecare ecuaţie din sistemul de ecuaţii anterior. Se obţin soluţiile:

$$x = \frac{1}{2}\left[\arcsin \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{b} + \arcsin \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\arcsin \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{a} + \arcsin \frac{\varepsilon \sqrt{abc}}{c}\right]$$, analog pentru z, unde $\varepsilon = \pm 1$

Capitolul 8

8.1. Aducem la acelaşi numitor şi obţinem:

$$(\cos a + i\sin a)(\sin a - i\cos a) + (\cos a - i\sin a)(\sin a + i\cos a) =$$
$$= 2\sin 2a \text{ sau}$$

$$2\sin a\cos a + i(\sin^2 a - \cos^2 a) + 2\sin a\cos a - i(\sin^2 a - \cos^2 a) =$$
$$= 4\sin a\cos a = 2\sin 2a.$$

8.2. $(\sin 3x + i\sin x)(\cos 3x\ i\cos x) = \frac{1}{2}[\sin 6x - \sin 2x] + i\sin 4x =$

$$= \sin 2x[\cos 4x + 2i\cos 2x].$$

Se egalează modulul produsului cu produsul modulelor.

8.3. $\cos(x + y) + i\sin(x + y)$.

8.4. Un număr complex de modul 1 se poate pune sub forma:

$$\cos x + i\sin x = \frac{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - i\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}, \text{ unde } \lambda = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

8.5. Prima relaţie se scrie:

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0,$$

de unde $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

rezultă apoi:

$$x^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$$

şi deci

$$\frac{1}{x^n} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha$$

aşa că obţinem:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

8.6. Se aduc la forma trigonometrică $\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ şi $(1 + i)$ şi apoi se aplică produsul a trei numere complexe scrise sub formă trigonometrică.

8.7. Se înmulţeşte numărătorul şi numitorul cu conjugata numitorului. Se obţine $\cos 6a + i\sin 6a$. Pentru $a = 15°$ se obţine ca rezultat i.

8.8. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)\right].$

8.9. $2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right).$

8.10. $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{12}.$

8.11. $-64.$

8.14. $\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}.$

8.15. Se scriu x_1 şi x_2 sub formă trigonometrică.

$$x_1^n + x_2^n = 2\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

8.16. Avem:

$$(1 + \cos x + i\sin x)^n = \left[2\cos^2\frac{x}{2} + 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

8.17. Se dezvoltă şi se scrie sub formă trigonometrică expresia:

$$(1 + i)^n - \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n.$$

8.18. Se face $k = 0, 1, 2, 3, 4$ în

$$x = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{2k\pi + \alpha}{5} + i\sin\frac{2k\pi + \alpha}{5}\right),$$

unde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ şi $\alpha = 53°7'48''$.

8.19. $\sqrt[16]{2}^{\,1}\left(\cos\frac{24k + 5}{96}\pi + i\sin\frac{24k + 5}{96}\pi\right).$

unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

8.20. $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$,

unde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

8.21. $A = \frac{\cos(\beta+\gamma-2\alpha)}{4\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)}$;

$$B = \frac{\sin(\beta+\gamma-2\alpha)}{4\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)}.$$

8.22. Se transformă sumele de cosinusuri și de sinusuri în produse, se dă apoi factor comun.

8.24. Notăm $u = \cos a + i\sin a$ și $v = \cos a - i\sin a$

și avem $u^5 = \cos 5a + i\sin 5a$; $v^5 = \cos 5a - i\sin 5a$, $u^5 + v^5 =$

$= 2\cos 5a$; $u^5 - v^5 = 2i\sin 5a$; $2\cos a = u + v$, $2i\sin a = u - v$

$$2^5 \cdot \cos^5 a = (u+v)^5; \quad -2^5 i\sin^5 a = (u-v)^5.$$

Dezvoltăm după binomul lui Newton și grupăm termenii egal depărtați de extremi.

8.26. $N = \frac{2\sqrt{2}}{(1-i)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)}{2\cdot 4} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}.$$

De unde:

$$N^{121} = \cos\frac{605}{12}\pi + i\sin\frac{605}{12}\pi = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = N.$$

8.28. $N = \frac{(\sqrt{3}-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} -\right.$

$$\left. - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

$$N^{1967} = 2^{933}\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right) - i\sin\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)\right] = 2^{983}\sqrt{2}\left[-\cos\frac{7\pi}{12} +\right.$$

$$\left. + i\sin\frac{7\pi}{12}\right] = 2^{983}\, 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = 2^{982}\left[(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)\right].$$

8.30. $a + b\,\mathrm{i} = r\,(\cos\ \alpha + \mathrm{i}\sin\ \alpha)$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$x + y\,\mathrm{i} = \rho\,(\cos\ \omega + \mathrm{i}\sin\ \omega);\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(a + b\,\mathrm{i})^2 = (x + y\,\mathrm{i})^{2n} \text{ sau}$$

$$r^2\,(\cos 2\,\alpha + \mathrm{i}\sin 2\,\alpha) = \rho^{2n}\,(\cos 2\,n\omega + \mathrm{i}\sin 2\,n\,\omega)$$

Este necesar să avem:

$$r^2 = \rho^{2n} \text{ sau } (a^2 + b^2) = (x^2 + y^2)^n.$$

Analog

$$\sqrt[n+1]{a' + b'\,\mathrm{i}} = y + x\mathrm{i}, \text{ devine}$$

$$(a')^2 + (b')^2 = (x^2 + y^2)^{n+1}, \text{ de unde}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(a')^2 + (b')^2}{a^2 + b^2}.$$

8.32. Se folosește produsul numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică.

$$(\cos a_1 + \mathrm{i}\sin a_1)\,(\cos a_2 + \mathrm{i}\sin a_2)\ldots(\cos a_n + \mathrm{i}\sin a_n) =$$
$$= \cos\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \mathrm{i}\sin\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Separînd părțile reale și cele imaginare. Se mai pot exprima folosind și relațiile:

$$\cos a_i + \mathrm{i}\sin a_i = \cos a_i\,(1 + \mathrm{i}\ \mathrm{tg}\ a_i).$$

$$\text{Notăm } S_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}\ a_i;\ S_2 = \sum \mathrm{tg}\ a_1\ \mathrm{tg}\ a_2$$

$$S_3 = \Sigma\ \mathrm{tg}\ a_1\ \mathrm{tg}\ a_2\ \mathrm{tg}\ a_3 \text{ . etc. și obținem:}$$

$$\sin\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \cos\ a_1\ \cos\ a_2\ldots\cos\ a_n\ (S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots)$$
$$\cos\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \cos\ a_1\ \cos\ a_2\ldots\cos\ a_n\ (1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots$$

Observare. Se deduce:

$$\mathrm{tg}\ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots.}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots.}.$$

8.35. Rădăcinile sub formă trigonometrică ale celor două ecuații sînt date respectiv de expresiile:

$$x = \cos\frac{2\,k\,\pi}{30} + \mathrm{i}\sin\frac{2\,k\,\pi}{30} \text{ și } x = \cos\frac{2\,k'\,\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{2\,k'\,\pi}{20}.$$

Rădăcinile comune vor fi pentru valorile lui k și k', care satisfac egalitatea $\frac{2\,k}{30} = \frac{2\,k'}{20}$ sau $2k = 3k' = 6n$.

Rădăcinile căutate sînt date de expresia:

$$x = \cos\frac{2n\pi}{10} + i\,\frac{2n\pi}{10} \text{ pentru } n = 0, 1, \ldots 9.$$

8.37. $1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$$(1 + i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}\,i\,\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Considerăm identitățile:

$$\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1 + i)^n$$

$$\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1 - i)^n.$$

Prin adunare și scădere obținem relațiile cerute.

8.38. $\dfrac{a - 2x - 2\sqrt{x^2 - ax - b^2}}{a + 2bi} = \sqrt[n]{1} = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ —

$$-2\sqrt{x^2 - ax - b^2} = (a + 2bi)\left(\cos\frac{2k\pi}{x} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - a + 2x.$$

Ridicăm la pătrat și simplificăm. Obținem:

$$(a + 2bi)^2\left(\cos\frac{4k\pi}{n} + i\sin\frac{4k\pi}{n}\right) + a^2 + 2(a + 2bi)(2x - a)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + 4b^2 = 0.$$

Împărțim prin $(a + 2bi)\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ și obținem

$$(a + 2b\,i)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + (a - 2bi)\left(\cos\frac{-2k\pi}{n} + i\sin\frac{-2k\pi}{n}\right) +$$

$+ 4x - 2a = 0$, sau reducînd și împărțind cu 2 obținem:

$$a\cos\frac{2k\pi}{n} - 2b\sin\frac{2k\pi}{n} + 2x - a = 0,$$

$$2x = a\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right) + 2b\frac{\sin 2k\pi}{n}, \text{ deci:}$$

$$x = a\sin\frac{2k\pi}{n} + b\sin\frac{2k\pi}{n};\ (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

8.39. $\left(\dfrac{x + i\sqrt{x^2 - a^2}}{x - i\sqrt{x^2 - a^2}}\right)^n = 1 = \cos 2k + i\sin 2k.$

Extragem rădăcina de ordinul n

$$\frac{x+i\sqrt{x^2-a^2}}{x-i\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1}.$$

Aplicăm o proprietate a proporţiilor derivate:

$$\frac{x}{i\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{i\sin\frac{k\pi}{n}};\quad \frac{x^2}{x^2-a^2}=\frac{\cos^2\frac{k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

Aplicăm iar o proprietate a rapoartelor:

$$\frac{2x^2-a^2}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{k\pi}{n}-\sin^2\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{\cos^2\frac{2k\pi}{n}}=\sec\frac{2k\pi}{n}$$

$$x=\pm a\sqrt{\frac{1+\sec\frac{2k\pi}{x}}{2}};\ k=0,1,2,\ldots,(n-1).$$

8.40. Se consideră $z+z^2+\ldots+z^n$, unde $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Se exprimă suma şi se identifică coeficienţii lui i din cei doi membri. Se obţine:

$$T=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

8.41. Fie $T=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$

şi
$$S=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$$

Fie $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}$. Atunci:

$$S+T_i=\alpha^2+\alpha^4+\ldots+\alpha^{2n}\text{ sau}$$

$$S+T_i=\alpha^2\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}=\alpha^2\cdot\frac{\alpha^n(\alpha^n-\alpha^{-n})}{(\alpha-\alpha^{-1})}=\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

de unde $T=\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; $S=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

8.42. Se notează cu $z=\cos x+i\sin x$ şi de aici $z^k=\cos kx+i\sin kx$

Putem scrie apoi:

$$S+iT=z+az^2+a^2z^3+\ldots+a^{n-1}z^n.$$

În membrul al doilea avem o progresie geometrică cu rația az, așa că:

$$S + iT = \frac{a^n z^{n+1} - z}{az - 1} = \frac{a^n [\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - (\cos x + i\sin x)]}{a(\cos x + i\sin x) - 1} =$$

$$= \frac{[a^n \cos(n+1)x - \cos x] + i[a^n \sin(n+1)x - \sin x]}{(a\cos x - 1) + i\sin x}.$$

Se amplifică apoi cu conjugata numitorului și se egalează partea reală în S și coeficientul lui i cu T, obținîndu-se după ce se face operațiile:

$$S = \frac{a^{n+1}\cos nx - a^n \cos(n+1)x + \cos x - a}{a^2 - 2a\cos x + 1}, \qquad (1)$$

$$T = \frac{a^{n+1}\sin nx - a^n \sin(n+1)x + \sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}. \qquad (2)$$

Observația I. Dacă în (1) și (2) facem $a = -1$, obținem:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x + \ldots + (-1)^{n-1}\cos nx =$$

$$= \frac{-\cos nx - \cos(n+1)x + \cos x + 1}{2(1 + \cos x)}, \text{ pentru } n \text{ par și}$$

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x \ldots + (-1)^{n-1}\cos nx =$$

$$= \frac{\cos nx + \cos(n+1)x + \cos x + 1}{2\cdot(1 + \cos x)}, \text{ pentru } n \text{ impar.}$$

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx =$$

$$= \frac{-\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{2(1 + \cos x)}, \text{ pentru } n \text{ par și}$$

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx =$$

$$= \frac{\sin nx + \sin(n+1)x + \sin x}{2(1 + \cos x)}, \text{ pentru } n \text{ impar.}$$

II. Din (1) și (2) deducem:

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| < \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

și

$$|\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx| < \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

oricare ar fi numărul termenilor.

8.43. Se notează:

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n\cos n\varphi.$$

Se formează expresia:

$$T = a \sin \varphi + a^2 \sin 2\varphi + \ldots + a^n \sin n\varphi \text{ și}$$

$$S + Ti = 1 + a(\cos \varphi + i\sin \varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + a^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Punînd $\alpha = \cos \varphi + i\sin \varphi$, avem:

$$S + Ti = 1 + a\alpha + a^2\alpha^2 + \ldots + a^n\alpha^n = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1}.$$

Mai putem scrie:

$$S + Ti = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1} \cdot \frac{a\alpha^{-1} - 1}{a\,.\,\alpha^{-1} - 1} = \frac{a^{k+2}\alpha^k - a^{k+1}\alpha^{k+1} - a\alpha^{-1} + 1}{a^2 - a(\alpha + \alpha^{-1}) + 1} \text{ și deci}$$

$$S = \frac{a^{k+1}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}.$$

8.44. Se consideră ecuația $x^{2n} - 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \text{ și}$$

$$\overline{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n} \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots (n-1).$$

Putem scrie:

$$x^{2n} - 1 = (x+1)(x-1)(x - x_1)(x - \overline{x}_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - \overline{x}_{n-1}) \quad (1)$$

Însă:

$$(x - x_k)(x - \overline{x}_k) = x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1 \text{ și deci (1) devine:}$$

$$x^{2n} - 1 \equiv (x^2 - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\cdot$$

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right),$$

ceea ce se poate scrie prescurtat:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} \quad (2)$$

Pentru $x = 1$, avem:

$$x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1 = 2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = 2^2\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

așa că (2) devine:

$$2^{2n-2}\sin^2\frac{\pi}{2n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n} = n,$$

de unde:

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2^n}\cdots\frac{\sin(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \qquad (3)$$

pentru $x = i$, avem:

$$(-2i)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{(-1)^n-1}{-2},$$

de unde deducem:

$$\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0, \qquad (1)$$

dacă n este par şi egal cu $\frac{(-1)^m}{2^{2m}}$ dacă $n = 2m + 1$ (impar)

Observaţii. 1) Pentru $x = -1$ obţinem:

$$\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{3\pi}{2^n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \qquad (5)$$

(arcele fiind mai mici decît $\frac{\pi}{2}$).

2) Dacă înmulţim (3) cu (5) şi ţinem seama că

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2},\ \text{obţinem:}$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

8.45. *Soluţia* I. $\sin nx = \sin(n-1)x\cos x + \cos(n-1)x\sin x$.

Împărţim prin $\cos^n x$ şi obţinem:

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x}=\frac{\sin(n-1)x}{\cos^{n-1}x}+\frac{\cos(n-1)x}{\cos^{n-1}x}\cdot\operatorname{tg}x.$$

De unde scriem succesiv:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x\cdot 1$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\operatorname{tg}x\cdot\frac{\cos x}{\cos x},$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}=\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}+\operatorname{tg}x\frac{\cos 2x}{\cos x},$$

$$\ldots\frac{\sin(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\sin nx}{\cos^n x}+\operatorname{tg}x\cdot\frac{\cos nx}{\cos^n x},$$

$$\frac{\sin(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=S_n\operatorname{tg}x;\ \text{deci}\ S_n=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}.$$

Soluția II. Mai notăm $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k x}{\cos^x x}$.

$$-1 + S_n + \mathrm{i}\ \Sigma_n = \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x}{\cos^2 x} + \dots$$

Aplicăm formulele $\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$.

$$-1 + S_n + \Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x}\right)^k = \frac{\left(\frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x}\right)^{n+1} - \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{\cos (x+1)x + \mathrm{i}\sin (n+1)x}{\cos x} - \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{\cos x}}{\frac{\mathrm{i}\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin (n+1)x - \sin x \cos^n x}{\sin x \cos^n x} +$$

$$+ \mathrm{i}\,\frac{\cos^{n+1} x - \cos (n+1)x}{\sin x \cos^n x}.$$

$$S_n = \frac{\sin (n+1)x}{\sin x \cos x}\text{; iar:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k x}{\cos^k x} = \operatorname{cotg} x - \frac{\cos (x+1)x}{\sin x \cos^n x}.$$

8.46. (v. soluția II-a de la problema precedentă).

8.47. Plecăm de la relația:

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} z^{2k} = \frac{1 - z^{4k}}{1 - z^2},$$

din care deducem:

$$z^{2n-1}(1 - z^2) \sum_{k=1}^{n} (z^{2k-1} + z^{-2k+1}) = 1 - z^{4n}.$$

Cu înlocuirea $z = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ obținem

$$2 \sum_{k=1}^{n} \cos (2k - 1)\, a = \frac{\sin 4na}{2 \cos 2na \sin a},$$

de unde relația din enunț.

8.48. Fie relația $\left(1 + \sum_{k=1}^{2n} z^{2k}\right) = \frac{1 - z^{4n+2}}{1 - z^2}$,

care se mai scrie:

$$(1 - z^2) z^{2n}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} (z^{2k} + z^{-2k})\right] = 1 - z^{4n+2}.$$

Înlocuind $z = \cos a + i\sin a$, obținem:

$$\cos 2\,n\,a + i\sin 2\,n\,a - \cos (2\,n + 2)\,a - i\sin (2\,n + 2)\,a =$$

$$= \frac{1 - \cos (4\,n+2)\,a - i\sin (4\,n + 2)\,a}{2\left(\sum_{k=1}^{n} \cos 2\,k\,a + \frac{1}{2}\right)}.$$

Separăm părțile imaginare și obținem:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2\,k\,a = \frac{\sin (4\,n + 2)\,a}{2\cos (2\,n + 1)\sin a} = \frac{\sin (2\,n + 1)\,a}{\sin a}.$$

8.50. Fie $x = \cos a + i\sin a$; $\frac{1}{x} = x^{-1} = \cos a - i\sin a$, deci $x + \frac{1}{x} =$

$$= 2\cos a.$$

Ținem seama de formula lui Moivre și avem:

$$\cos a + i\sin a + \cos 2\,a + i\sin 2\,a + \ldots + \cos n\,a + i\sin n\,a +$$
$$+ \cos a - i\sin a + \cos 2\,a - i\sin 2\,a + \ldots + \cos n\,a - i\sin n\,a =$$

$$2\,\frac{\cos\frac{(n+1)\,a}{2} \cdot \sin\frac{n\,a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \cos ka.$$

8.51. Fie $S_1 = \sum_{k=0}^{p} (n + k)\,x$ și $S_2 = \sum_{k=0}^{p} \cos (n + k)\,x$

$$E = S_2 + i\,S_1 = \sum_{k=0}^{p} [\cos (n + k)x + i\sin (n + k)\,x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (\cos x + i\sin x)^{n+k} = (\cos x + i\sin x)^n \sum_{k=0}^{p} (\cos x + i\sin x)^k.$$

$$\sum_{k=0}^{p} (\cos x + i\sin x)^k = \frac{1 - (\cos x + i\sin x)^{p+1}}{1 - (\cos x + i\sin x)}\text{; deci:}$$

$$E = (\cos n\,x + i\sin n\,x)\,\frac{1 - \cos (p + 1)\,x - i\sin (p + 1)\,x}{1 - \cos x - i\sin x},$$

$$E = (\cos n x + i\sin n x) \cdot \frac{2\sin^2 \frac{(p+1)x}{2} - 2 i\sin \frac{(p+1)x}{2} \cos \frac{(p+1)x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2} - 2 i\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= (\cos n x + i\sin n x) = \frac{\sin \frac{(p+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{(p+1)x}{2} + i\sin \frac{(p+1)x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + i\sin \frac{x}{2}}.$$

Ținem seama de formula:

$$\frac{\cos a + i\sin a}{\cos b + i\sin b} = \cos (a-b) + i\sin (a-b)$$

și obținem

$$E = (\cos n x + i\sin n x) \frac{\sin \frac{(p+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{px}{2} + i\sin \frac{px}{2}\right).$$

$$E = \frac{\sin \frac{(p+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{(n+p)x}{2} + i\sin \frac{(n+p)x}{2}\right] = S_2 + i S_1$$

pentru $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ simplificăm și ecuația $S_1 - S_2 = 0$, devine:

$$\sin \frac{(p+1)x}{2} \left[\sin \frac{(2n+p)x}{2} - \cos \frac{(2n+p)x}{2}\right] = 0.$$

Deci:

$$\sin \frac{(p+1)x}{2} = 0 \text{ ne dă: } x = \frac{2k\pi}{p+1},$$

iar a doua ecuație devine:

$$\operatorname{tg} \frac{(2n+p)x}{2} = 1, \quad \text{cu } x = \frac{(4k+1)\pi}{2(2n+p)}, \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

8.53. Se consideră $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i\sin \frac{2\pi}{n}$, de unde: $z + \frac{1}{z} = 2\cos \frac{2\pi}{n}$. Se ridică la puterea n-a și se dezvoltă grupîndu-se termenii echidistanțați.

.54. Ecuația $x^{2n} + 1 = 0$ sau $x^n + \frac{1}{x^n} = 0$, ecuația reciprocă, admite rădăcinile:

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} = a_k,$$

unde $k = 1, 2, \ldots, (2n-1)$.

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)\left(x-\frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{x^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 1 - \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)x\right]$$

sau

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)\right].$$

Notăm $x = e^{i\theta}$, $(i^2 = -1)$

şi avem formulele lui Euler:

$$x + \frac{1}{x} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta;$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = e^{xi\theta} + e^{-xi\theta} = 2\cos n\theta.$$

Mai avem:

$$\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

obţinem:

$$2\cos n\theta = 2^n\prod_{k=0}^{n-1}\cos\theta - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Dacă acum facem $\theta = \frac{\pi}{6n}$, avem:

$$2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} = 2^n\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos\frac{\pi}{6n} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] =$$

$$= 2^{2n}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(3k+1)\pi}{6n}\sin\frac{(3k+2)\pi}{6n},$$ deci identitatea cerută.

8.55. Într-un patrulater $ABCD$ avem $A+B+C+D = 360°$, iar într-un triunghi ABC avem $A+B+C=180°$. Produsul parantezelor devine respectiv:

$$\cos(A+B+C+D) + i\sin(A+B+C+D) = 1,$$

$$\cos(A+B+C) + i\sin(A+B+C) = -1$$

8.58. $T = \dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

8.59. $T = \dfrac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

8.60. Pentru suma S_1 se înmulţeşte cu $2\sin\frac{r}{2}$ şi se transformă produsele în **diferenţă** de cosinusuri şi obţinem:

$$2S_1\sin\frac{r}{2} = \cos\left(x-\frac{r}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{r}{2}\right) +$$

$$+\cos\left(x+\frac{r}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{3r}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{3r}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{5r}{2}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\cos\left[x+\frac{(2n-3)r}{2}\right] - \cos\left[x+\frac{(2n-1)r}{2}\right].$$

După efectuarea reducerilor avem:

$$2S_1\sin\frac{r}{2} = \cos\left(x-\frac{r}{2}\right) - \cos\left[x+\frac{(2n-1)r}{2}\right] = 2\sin\left[x+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)r}{2}\right]\sin\frac{nr}{2}$$

şi deci:

$$S_1 = \frac{\sin\left[x+\dfrac{(n-1)r}{2}\right]\cdot\sin\dfrac{nr}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}}.$$

Pentru S_2 se observă că termenii sumei se obţin din termenii sumei S_1 înlocuind pe x cu $\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ şi întrucît $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$, obţinem:

$$S_2 = \frac{\cos\left[x+\dfrac{(n-1)r}{2}\right]\sin\dfrac{nr}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}}$$

8.61. Pentru suma S_1 se aplică formula:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ şi avem:}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}[1-\cos 2(x+r)] + \ldots + \frac{1}{2}\{1-\cos 2[x+$$

$$+(n-1)r]\} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\{\cos 2x + \cos(2x+2r) + \ldots + \cos[2x+$$

$$+1(n-1)2r]\} \qquad (1)$$

S-a arătat că

$$\cos x + \cos(x+r) + \ldots + \cos[x+(n-1)r] = \frac{\cos\left[x+\frac{n-1}{2}r\right]\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}. \quad (2)$$

Şi în acest caz dacă în (2) înlocuim x cu $2x$ şi r cu $2r$; (1) devine:

$$S_1 = \frac{n}{2} - \frac{\cos[2x+(n-1)r]\sin nr}{\sin r}. \quad (3)$$

Pentru S_2 substituim pe x cu $\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ şi obţinem:

$$S_2 = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}.$$

8.62. Pentru suma T_1 se ţine seama că:

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \text{ şi obţinem:}$$

$$T_1 = \frac{1}{4}\left[3\sin x - \sin 3x\right] + \frac{1}{4}[3\sin(x+r) - \sin 3(x+r)] +$$
$$+ \frac{1}{4}[3\sin(x+2r) - \sin 3(x+2r)] + \ldots$$
$$+ \frac{1}{4}\{3\sin[x+(n-1)r] - \sin 3[x+(n-1)r]\} =$$
$$= \frac{3}{4}\{\sin x + \sin(x+r) + \ldots + \sin[x+(n-1)r]\} -$$
$$- \frac{1}{4}\{\sin 3x + \sin(3x+3r) + \ldots + \sin[3x+(n-1)3r]\} \quad (1)$$

Ori, s-a arătat că:

$$\sin x + \sin(x+r) + \ldots + \sin[x+(n-1)r] =$$
$$= \frac{\sin\left[x+\frac{(n-1)r}{2}\right]\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}} \quad (2)$$

şi de aici $\sin 3x + \sin(3x+3r) + \ldots + \sin[3x+(n-1)3r] =$

$$= \frac{\sin\left[3x+\frac{(n-1)3r}{2}\right]\sin\frac{3nr}{2}}{\sin\frac{3r}{2}} \quad (3)$$

așa că (1) devine:

$$T_1 = \frac{3}{4} \frac{\sin\left[x + \frac{n-1}{2} r\right] \sin \frac{nr}{2}}{\sin \frac{n}{2}} - \frac{1}{4} \frac{\sin\left[3x + \frac{(n-1)3r}{2}\right]}{\sin \frac{3r}{2}}.$$

Pentru T_2 se face în (4) $r = x$ și obținem:

$$T_2 = \frac{3}{4} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{3(n+1)x}{2} \sin \frac{3nx}{2}}{\sin \frac{3x}{2}}.$$

8.63. $$T = \frac{3 \cos \frac{n+1}{2} + \sin \frac{nr}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{3(n+1)}{2} x \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}.$$

8.64. În formula care dă:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

se va face $n = 3$ și $x = \frac{2\pi}{7}$.

8.65. Fie M punctul luat în interiorul poligonului regulat cu apotema egală cu a.

Din M ducem perpendicularele MA_1, MA_2... pe laturi. Notăm cu x unghiul OMA și cu h unghiul $\frac{2\pi}{n}$; avem:

$$\sphericalangle OMA_2 = x + h_1, \quad \sphericalangle OMA_3 = x + 2h_1 \ldots$$
$$\sphericalangle OMA_1 = x + (i-1) h, \ldots$$

Fie δ distanța OM și P_i proiecția punctului O pe MA_i; avem:

$$MP_i = MO \cos (OMA_i) = \delta \cos [x + (i-1) h]$$

și $MA_i = MP_i + P_i A_i = a + \delta \cos [x + (i-1) h]$

Avem apoi:

$$MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n = n \cdot a + \delta \{ \cos x + \cos (x+h) + \cos (x + 2h) + \ldots + \cos [x + (n-1) h] \}.$$

Ori:

$$\cos x + \cos (x+h) + \ldots + \cos [x + (n-1) h] = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos \left[x + \frac{n-1}{2} h\right]}{\sin \frac{h}{2}}.$$

În cazul problemei $\frac{nh}{2} = \pi$, așa că suma din paranteză este egală cu zero și deci:

$$MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n = n \cdot a.$$

8.66. Fie un poligon regulat $A_1 A_2 \ldots A_n$ înscris în cercul de rază R și M un punct pe acest cerc. Coarda care subîntinde arcul 2α are ca lungime $2R \sin \alpha$.

Notăm cu 2α arcul MA_1 și cu $2h$ arcul $\frac{2\pi}{n}$ subîntins de latura poligonului. avem:

$$\text{arc } MA_1 = 2\alpha; \quad \text{arc } MA_2 = 2\alpha + 2h; \quad \text{arc } MA_3 = 2\alpha + 4h; \ldots;$$
$$\text{arc } MA_n = 2\alpha + 2(n-1)h,$$

și de aici:

$$MA_1 = 2R \sin \alpha; \quad MA_2 = 2R \sin(\alpha + h); \quad MA_3 = 2R \sin(\alpha + 2h); \ldots$$
$$MA_n = 2R \sin[\alpha + (n-1)h].$$

Ridicăm la pătrat și adunăm membru cu membru.

8.67. Să dovedim că:

$$M_1 M_2 . M_1 M_3 \ldots M_1 M_n = nR^{n-1}.$$

Notăm cu a arcul $\frac{\pi}{n}$ și avem:

$$M_1M_2 \cdot 2R \sin a; \quad M_1M_3 = 2R \sin 2a; \quad M_1 M_3 = 2R \sin 3a; \ldots$$
$$M_1M_n = 2R \sin (n-1) a.$$

Prin înmulțire:

$$M_1M_2 \cdot M_1M_3 \cdots M_1M_n = 2^{n-1} R^{n-1} \sin a \cdot \sin 2a \ldots \sin[(n-1)a]$$

și pentru $a = \frac{\pi}{n}$ avem:

$$M_1M_2 \cdot M_1M_3 + \ldots . M_1M_n = 2^{n-1} R^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Ori, s-a arătat că:

$$\sin \frac{\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{3\pi}{n} \ldots . \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \text{ de unde:}$$

$$M_1M_2 \cdot M_1M_3 \ldots . M_1M_n = 2^{n-1} R^{n-1} . \frac{n}{2^{n-1}} = nR^{n-1}.$$

8.68. Se rezolvă relațiile date în raport cu x și y și se obține:

$$x = \cos A \pm i \sin A; \; y = \cos B \pm i \sin B.$$

Se exprimă apoi $bx + \frac{a}{y}$ şi se obţine $c = a \cos B + b \cos A$.

8.69. $z = \sqrt[4]{-4}$

dă: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

8.70. Se face $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ în

$$z = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos \frac{24\,k + 17}{72}\,\pi + i\sin \frac{24\,k + 17}{72}\,\pi\right).$$

8.71. Primul membru se poate scrie:

$$\cos \frac{n(n+1)\,x}{2} + i\sin \frac{n(n+1)}{2}\,x.$$

Se egalează apoi partea reală cu 1 şi cea imaginară cu zero. Se obţine:

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot x = 2k\pi.$$

8.73. Se pleacă de la $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi unghiurile fiind în primul cadran folosim formulele:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};\ \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},\ldots$$

8.74. Prin metoda inducţiei matematice. Pentru $n = 1$ avem:

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right), \text{ iar}$$

$$(1 + i)^{k+1} = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos \frac{k\pi}{4} + i\sin \frac{k\pi}{4}\right) \cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos \frac{(k+1)\pi}{4} + i\sin \frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

8.75. Prin metoda inducţiei matematice. Se verifică $n = 1$.

$$(\sqrt{3} - 1)^{k+1} = 2^k\left(\cos \frac{k\pi}{6} - i\sin \frac{k\pi}{6}\right) \cdot 2\left(\cos \frac{\pi}{6} - i\sin \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{k+1}\left[\cos \frac{(k+1)\pi}{6} - i\sin \frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

Capitolul 9

9.1. Fie D intersecţia laturii AC cu paralela dusă prin A la bisectoarea interioară a unghiului A. Se scrie apoi aria triunghiului CBD sub două forme şi se obţine:

$DC \cdot DB \sin (CDB) = BC \cdot DB \cdot \sin (CBD)$, care este tocmai relaţia cerută, întrucît $DC = b + c$;

$$\sphericalangle CBD = \frac{A}{2} + B = \frac{\pi}{2} + \frac{B-C}{2}.$$

9.2. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi A', B', C' punctele unde razele OA, OB şi OC întîlnesc respectiv cercul descris din O ca centru şi cu diametrul egal cu 1.

Triunghiurile asemenea ABC, $A'B'C'$ dau:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Se ţine seama apoi că:

$B'C' = \sin A' = \sin A$; $C'A' = \sin B' = \sin B$ şi $A'B' = \sin C' = \sin C$.

9.3. Fie D intersecţia laturii AC cu paralela dusă prin B la bisectoarea interioară a unghiului A. Luăm pe AC lungimea $AE = AD$; DE este perpendiculară pe BD şi fie F proiecţia lui C pe BD.

Triunghiurile FEC şi FBC fiind echivalente, avem $CE \cdot CF \sin (ECF)$ $EC = BC \cdot CF \sin (BCF)$; dar $EC = b - c$, $\sphericalangle ECF = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$;

$$\sphericalangle BCF = \frac{B-C}{2}.$$

9.4. Fie D intersecţia laturii AC cu paralela dusă prin B la bisectoarea interioară a unghiului A.

Luăm pe AC lungimea $AE = AD$; DE este perpendiculară pe BD şi fie F proiecţia lui C pe BD. Avem, proporţia:

$$\frac{FE}{FD} = \frac{CE}{DE}; \text{ dar } FB = FC \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}; \; FD = FC - tg\,\frac{B+C}{2}.$$

9.5. Ducem mediatoarea OM care taie arcul BC în mijlocul său D, iar AD va fi bisectoarea unghiului A și trece prin I, centrul cercului înscris. Avem:

$$\sphericalangle DBI = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBI = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Apoi $\sphericalangle DIB$ este exterior triunghiului BIA și deci:

$$\sphericalangle DIB = \frac{B}{2} + \frac{A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Rezultă că triunghiul BDI este isoscel, de unde:

$$ID = BD = 2R \sin\frac{A}{2},$$

însă:

$$r = IA \cdot \sin\frac{A}{2}, \text{ de unde } \sin\frac{A}{2} = \frac{r}{IA}, \text{ deci:}$$

$$2Rr = ID \cdot IA.$$

Fie P și Q punctele în care dreapta OI taie cercul O; avem:

$$ID \cdot IA = IP \cdot IQ = (R - OI)\ (R + OI) = R^2 - OI^2.$$

Prin urmare:

$$R^2 + OI^2 = 2Rr \quad \text{sau}$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ și deci:}$$

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

9.6. $\sphericalangle PAC = 51°23'17''$, $\sphericalangle PBC = 71°21'28''$.

9.7. 872,7 cm.

9.8. $AC = 41{,}45$ m.

9.9. $21°48'56'',4$.

9.10. Dacă x este înălțimea arborelui și y lățimea rîului, din datele problemei se obțin:

$$x = 10\sqrt{3} \text{ m și } y = 10 \text{ m}.$$

9.11. $\frac{a}{4}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$.

9.12. $\sqrt{16 + 8\sqrt{2}}$ km și $\sqrt{16 - 8\sqrt{2}}$ km.

9.13. 168 m.

9.14. $x = 90$ m.

9.15. $$r = d\,\frac{\sin\frac{\beta+\beta'}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'}{2}}\,.$$

9.16. Se consideră proiecţiile drumului pe bază şi înălţime şi se obţine ecuaţia trigonometrică:

$$\frac{\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{b}{h}\,,$$

a cărei soluţie este:

$$\alpha=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{b}{h}\,.$$

9.17. $h \cong 487$ m.

9.18. Se notează $BS = x$ şi $AT = y$.

Se exprimă AT şi BS din triunghiurile dreptunghice ABT şi ABS. Se ţine seama apoi că triunghiurile TAM şi MBS sînt asemenea. Se obţine astfel:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}\,;\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{3}{4}$$

şi apoi:

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{3a}{4}\,.$$

9.19. Avem $CD \parallel AB$, $C \in AP$

$$\sphericalangle DCY = x\,,\ \sphericalangle DCP = y$$

şi se obţine:

$$x-y=\alpha\,.$$

Considerînd triunghiurile dreptunghice VDC şi PDC se obţine:

$$\cos(x+y)=\frac{2d}{e}\sin\alpha-\cos\alpha\,.$$

Notînd $\frac{2d}{e}=\operatorname{ctg}\varphi$, se obţine:

$$\cos(x+y)=\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}\,.$$

Se cunoaşte deci $x + y$ ş $-y$, de unde se pot deduce valorile lui x şi y şi, în sfîrşit, înălţimea vîrfului paratrăsnetului faţă de sol:

$$AV = h + d\operatorname{tg}x\,.$$

9.20. Se egalează valorile lui XY deduse din triunghiurile XAY, XBY şi se obţine:

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\cdot\sin\beta'}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\alpha'+\alpha'')\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\alpha'-\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\beta'+\beta'')\sin\frac{1}{2}(\beta\pm\beta'-\beta'')}.$$

9.21. Presupunem punctul P în interiorul dreptunghiului şi fie

$$\frac{AB}{BC}=x,\ \sphericalangle PAD=\varphi.$$

Se va elimina φ între

$$x\cos(\alpha-\varphi)\sin\delta=\sin\alpha\sin(\delta+\varphi)\text{ şi}$$

$$x\cos\varphi\sin\beta=\sin\alpha\sin(\alpha+\beta-\varphi).$$

Rezultatul:

$$x^2\sin\beta\sin\delta-x\sin(\beta+\delta)+\sin\alpha\sin\gamma=0.$$

9.22. Fie C poziţia iniţială a corabiei; CN direcţia spre nord a meridianului punctului C. Atunci cele două faruri se află pe meridian în punctele A şi B. Fie $C=$ poziţia corabiei după o jumătate de oră; conform enunţului $CC'\perp BC$, $\sphericalangle AC'C=45°$, $\sphericalangle BC'C=67°30'$, încît problema se reduce la a calcula înălţimea corespunzătoare laturei AB din triunghiul ABC', în care cunoaştem pe AB şi cele două unghiuri alăturate.

Rezultatul este $10\sqrt{2}$ km.

9.23. Se va observa că vîrful unghiului α este punctul de contact al circumferinţei dusă prin cele două puncte, tangentă la dreapta pe care se mişcă observatorul şi se găseşte:

$$x=\frac{2a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

9.24. $$x=\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}.$$

9.25. Se va elimina φ între relaţiile:

$$x=l\cdot\operatorname{tg}\varphi;\ a+x=l\operatorname{tg}(\varphi+\alpha).$$

9.26. a) $V=\frac{32}{3}R^3\sin^2\frac{x}{2}\cos^2 x.$

b) $A_l=4a^2\sin 2x;\ A_t=16R^2\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cos x\sin\frac{x}{2}.$

c) $R=2R\cos x,\ \cos x=\frac{1}{2},\ x=60°.$

9.27. Trebuie să avem:

$$\left[\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\right]^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \alpha, \text{ de unde:}$$

$$\cos \alpha = \frac{2F_1F_2 - 3F_1^2 - 3F_2^2}{8F_1F_2}.$$

Discuție. Ca problema să fie posibilă trebuie ca:

$$(2F_1F_2 - 3F_1^2 - 3F_2^2)^2 < 64 F_1^2F_2^2 \text{ sau:}$$

$$3\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 10\left(\frac{F_1}{F_2}\right) + 3 < 0, \text{ deci:}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{F_1}{F_2} < 3.$$

Pentru datele numerice avem cazul limită:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha = -1, \quad \alpha = 180°.$$

9.28. Greutatea P a corpului se descompune în două componente; una perpendiculară pe planul indicat și egală cu $N = P \cos x$, iar cealaltă orientată de-a lungul planului înclinat și egală cu $P \sin x$.

Forța de frecare f este proporțională cu componenta normală:

$$f = kP \cos x.$$

Mișcarea pe planul înclinat se produce sub acțiunea forței $P \sin x - kP \cos x$, cu o accelerație egală cu:

$$\frac{P \sin x - kP \cos x}{m} = g(\sin x - k \cos x),$$

unde m este masa corpului, iar g este accelerația gravitațională. Prin ipoteză,

$$g(\sin x - k \cos x) = \frac{1}{n} g,$$

de unde obținem ecuația:

$$\sin x - k \cos x = \frac{1}{n}.$$

Se introduce un unghi auxiliar punînd:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \text{ și rezultă ecuația:}$$

$$\sin(x - \alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1 + k^2}}. \qquad (1)$$

După caracterul problemei: $0 < k < 1$; $n > 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ și $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ecuația (1) are soluție atunci, și numai atunci cînd:

$$\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \leqslant 1,$$

ultima condiție este satisfăcută, deoarece $n > 1$.

$$x = \arcsin\left(\frac{k\sqrt{n^2k^2+n^2-1}+1}{n(1+k^2)}\right).$$

9.29. Se descompune forța verticală de 200 kg după direcțiile celor două bare; se găsește: $F_1 = 130{,}5$ kg și $F_2 = 175{,}8$ kg.

9.30. Avem $R^2 = 2F^2 + 2F^2 \cos\alpha$,

$$F = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Cînd α variază de la 0 la 180°, F crește necontenit de la $\frac{R}{2}$ la $+\infty$.

9.31. Trebuie ca cele două forțe să fie egale cu $\frac{R}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Pentru $R = 200$ kg și $\alpha = 120°$ cele două componente sînt egale.

9.32. Luînd separat punctele A cu forțele ce acționează asupra lui A, forța de reacțiune este egală și de semn contrar cu rezultanta celor două forțe de tensiune T, care se dezvoltă în cablu pe direcțiile AB și AC.

$$\frac{|\overline{A}|}{\sin(\pi - A)} = \frac{T}{\sin\frac{A}{2}}; \quad |\overline{A}| = \frac{T\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = 2T\cos\frac{A}{2}.$$

Analog $|\overline{B}| = 2T\cos\frac{B}{2}$ și $|\overline{C}| = 2T\cos\frac{C}{2}$.

9.33. $AC = 2R\sin B$; $BS = 2R\sin A$; $AD = 2R\sin(ABD)$ $BC = 2R\sin(BAC)$. Raportul devine:

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin A_1 \sin B_1}.$$

9.34. Fie E și F proiecțiile lui D și B respectiv pe AB și CD. Avem:

$$\operatorname{ctg} a = \frac{AE}{DE}; \quad \operatorname{ctg} b = \frac{AB}{BH} = \frac{AB}{2DE};$$

$$\operatorname{ctg} c = \frac{DP}{FH} = \frac{AB - AE}{DE}.$$

9.35. Ducem și diagonalele AC și DB. Avem:

$$\frac{IA}{\sin (ICA)} = \frac{IC}{\sin (CAB)}, \quad \frac{IB}{\sin (CDB)} = \frac{ID}{\sin (IBD)}, \text{ dar:}$$

$$\sin (ICA) = \sin (ACD) \text{ și } \sin (IBD) = \sin (ABD).$$

Înmulțind relațiile găsite, ajungem la forma din enunț care generalizează relația cunoscută în patrulaterul inscriptibil $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

9.36. Fie $ABCD$ paralelogramul $AB = a$, $BC = b$, $BD = d_1$ și $AC = d_2$ și θ intersecția diagonalelor.

$$S = ab \sin \theta = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi.$$

Din teorema cosinusului în triunghiurile AOD și ADC avem respectiv:

$$\cos \varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4b^2}{2\, d_1 d_2} \quad \text{și} \quad \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - d_2^2}{2\, ab}.$$

Mai avem $2\,(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d_1^2 + d_2^2 - 4\, b^2}{2\, a^2 + 2\, b^2 - 2\, d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2\, a^2 - 2\, b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right|$$

$$\left|\frac{a^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin \theta - \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi}\right|.$$

9.37. Fie M punctul considerat pe arcul din $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BMD = x$, $\sphericalangle AMC = y$, iar M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe diagonalele BD și AC.

$$\sin x = \frac{MM_1 \cdot BD}{MB \cdot MD}; \quad \cos x = \frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{2\, MB \cdot MD}, \text{ de unde:}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\, BD \cdot MM_1}{MB^2 + MD^2 - BD^2}; \quad \operatorname{tg} y = \frac{2\, AC \cdot MM_2}{MA^2 + MC^2 - AC^2}.$$

Din teorema medianei avem:

$$MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2} BD^2.$$

Ținînd seama că $MM_1^2 + MM_2^2 = MD^2$, rezultă relația cerută:

9.38. $$\frac{ME}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin (\alpha + \beta)}; \quad \frac{2MB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin (A + \alpha)}.$$

$$\text{Obținem: } \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin A}{2 \sin (A + \beta)} \text{ sau}$$

$$2 \sin \alpha\, (\sin A \cos \beta + \sin \beta \cos A) = \sin A\, (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha),$$

de unde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Altă soluție. Fie $\sphericalangle MCB = x$; $\sphericalangle MBC = y$;

$$A = \alpha + x; \ B = \beta + y; \ x + y = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x - u}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ de unde se află:}$$

$$x \text{ și } y, \text{ apoi } A = \alpha + x, \ B = \beta + y.$$

9.39. $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\alpha} \cdot \frac{2}{\sin\alpha}$,

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\alpha} \cdot \frac{2}{\sin\alpha},$$

$$S = \frac{4\,ab}{\sin\alpha}.$$

9.40. Avem $4\,S = 2\,ab\sin B + 2\,cd\sin D$, (1)

iar dacă egalăm valorile lui AC^2 scoase din triunghiurile ABC și ACD găsim:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\,ab\cos B - 2\,cd\cos D. \quad (2)$$

Se ridică apoi (1) și (2) la pătrat și se adună rezultatele obținute membru cu membru.

9.41. Se exprimă că aria S este egală cu suma ariilor celor patru triunghiuri, formate de diagonale și laturi.

9.42. Notăm laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Să arătăm că:

$$ac + bd = AC \cdot BD.$$

Avem:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B. \quad (1)$$

Deoarece $B + D = 180°$ și deci $\cos D = -\cos B$.

Din (1) avem:

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)} \text{ și deci:}$$

$$AC^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,(ab + cd) - ab\,(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd} =$$

$$= \frac{(ac + bd)\,(bc + da)}{ab + cd}.$$

În mod analog găsim:

$$BD^2 = \frac{(bd + ac)\,(ab + cd)}{bc + da},$$

de unde:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (ac + bd)^2 \text{ și deci:}$$

$$ac + bd = AC \cdot BD.$$

9.43. 183,8 cm².

9.44. $S = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha.$

9.45. 71 cm.

9.46. Notînd $DC = a$ şi unghiul $DAC = \alpha$, se obţine:

$$EB = \frac{a\,(4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{4 \sin^2 \alpha}, EB = FB;$$

$$AF = AB - FB = \frac{3a}{4} \text{ şi deci } AF = 3 \cdot CE.$$

9.47. Să luăm baza mare egală cu a, iar A unghiul format de laturile a şi c.

Dreapta BF paralelă cu latura d împarte trapezul în triunghiul ABF şi paralelogramul $BCDF$. În triunghiul ABF se cunosc laturile c, d şi $(a - b)$ şi deci:

$$\cos A = \frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2c\,(a-b)}$$

$$\text{şi în mod analog } CD = \frac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2d\,(a-b)}.$$

Pentru calcularea ariei folosim formula:

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\,h = \frac{1}{2}(a+b)\,c, \sin A,$$

Avem:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2c\,|a-b|}\sqrt{4\,c^2(a-b)^2 - [(a-b)^2 + c^2 - d^2]^2}$$

şi de aici:

$$S = \frac{a+b}{4\,|a-b|}\sqrt{(c+d+a-b)^2 \cdot (c+d-a+b)\,(a-b-c+d)\,(c-b-d+d)}.$$

9.48. Avem $A + C = \pi$; $B + D = \pi$.

Se aplică triunghiurilor ABD şi BCD teorema cosinusurilor şi se obţine:

$$a^2 + b^2 - 2\,ad \cos A = b^2 + c^2 + 2\,bc \cos A$$

(ţinînd seama că $-\cos A = \cos C$), de unde:

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(bc + ad)}.$$

$$\text{Apoi: } 1 + \cos A = \frac{(a+d+c-b)\,(a+d+b-c)}{2\,(bc+ad)}$$

$$1 - \cos A = \frac{(-a+b+c+d)\,(a+b+c-d)}{2\,(bc+ad)}.$$

Notînd cu $2p$ perimetrul patrulaterului, avem:
$a + b - c - d = 2(p - d)$ şi în mod analog se transformă şi celelalte expresii. Se obţine apoi:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc+da}}\ ;\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{bc+ad}}$$

$$\text{de unde } \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}} \text{ şi}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{bc+ad},$$

unde A este unghiul format de laturile a şi d, iar c şi b sînt laturile opuse lor.

Aria S_1 se exprimă astfel:

$$S = \text{aria } \triangle ABD + \text{aria } \triangle BCD = \frac{1}{2}[ad \sin A + bc \sin(\pi - A)] =$$

$$= \frac{\sin A}{2}(ad + bc) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

9.49. $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2}$, unde $\alpha = 2 \arcsin\frac{a}{2R}$.

9.50. $S = R^2\left[\frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{180^\circ} + \sin\alpha\right]$.

9.51. 3,22 cm şi 7,78 cm.

9.52. $S = 0{,}4640$ m^2.

9.53. 30°.

9.54. $S = 21{,}75$ cm^2.

9.55. Fie O centrul cercului, B şi C punctele de intersecţie ale secantei dusă din A cu cercul.

Din triunghiurile OAB şi OAC se exprimă AB şi AC în funcţie de R, d şi unghiul α. Rezultatele obţinute se substituie în $AB^2 + AC^2 = m^2$ şi se obţine o ecuaţie trigonometrică care se rezolvă şi va da unghiul α.

9.56. $L = 15{,}29$ m.

9.57. a) $AB = a\cos\theta + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\theta}$.

$$AC = a\cos\theta - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\theta}.$$

$$\sphericalangle AOB = 90^\circ - \theta + \arccos\frac{a\sin\theta}{R}.$$

b) $$\cos\theta = \frac{3\sqrt{a^2 - R^2}}{2a\sqrt{2}}.$$

9.58. $S =$ aria $ABCD$ și $\sphericalangle BAD = \alpha$.

$$BD = 2R \sin \alpha; \; AC = 2r \sin \alpha.$$

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} = 2\, Rr \sin^2 \alpha\, ; \; \frac{BD}{AC} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}\, ;$$

$$\sin \alpha = \frac{2\, Rr}{R^2 + r^2}, \text{ deci } S = \frac{8\, R^3 r^3}{(R^2 + r^2)^2}.$$

9.59. Din triunghiurile ABD și BCD avem:

$$AB = \frac{BD \sin y}{\sin (x + y)}\, ; \; BC = \frac{BD \sin z}{\sin (u + z)}\, ; \; CD = \frac{BD \sin u}{\sin (u + z)}\, ;$$

$DA = \dfrac{BD \sin x}{\sin (x + y)}$. Condiția necesară și suficientă ca patrulaterul să fie circumscriptibil este $BC + AD = CD + AB$, deci sau

$$\frac{\sin z - \sin u}{\sin (u + z)} = \frac{\sin y - \sin x}{\sin (x + y)}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(z - u)}{\sin \frac{1}{2}(z + u)} \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(y - x)}{\sin \frac{1}{2}(y + z)} \text{ sau}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(z - u) + \sin \frac{1}{2}(z + u)}{\sin \frac{1}{2}(z + u) - \sin \frac{1}{2}(z - u)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(y + z) + \sin \frac{1}{2}(y - x)}{\sin \frac{1}{2}(y + x) - \sin \frac{1}{2}(y - x)},$$

de unde transformînd în produse obținem relația cerută.

9.60. Patrulaterul $AMEN$ este inscriptibil. Avem:

$$\frac{d_a}{\sin (B + C)} = \frac{ME}{\sin (MNE)}; \; \sin (MNE) = \sin (MAE) = \frac{ME}{m_a};$$

deci $d_a = m_a \sin A$; $d_b = m_b \sin B$; $d_c = m_c \sin C$.

Ținem seama că $h_a = b \sin C$; $h_b = c \sin A$; $h_c = a \sin B$.
Relația din enunț este verificată.

9.61. Notăm $CD = c$; $DA = d$; $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BCA = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle CAD = \delta$ și $\sphericalangle AIB = \varphi$, unde I este intersecția diagonalelor. Avem:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos B; \quad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2\, ab}; \text{ analog:}$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 + e^2 - a^2}{2\, be}; \; \cos \delta = \frac{c^2 + b^2 - b^2}{2\, cf},$$

$\gamma = B - \delta$; $D = 180° - B$; Mai avem:

$$\frac{c}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin D}, \text{ deci } c = \frac{e\sin\delta}{\sin D}.$$

$$\frac{f}{\sin A} = \frac{a}{\sin\beta};\ \sin A = \frac{f\sin\beta}{a};\ \alpha = A - \delta.$$

$$\frac{d}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\beta},\ d = \frac{a\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

9.62. Avem $MQ = NP = \frac{BD}{2} = x$;

$$x^2 = \alpha^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta\cos A = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos C =$$
$$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A, \text{ de unde:}$$

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2}{2(\alpha\delta + \beta\gamma)}, \text{ calculăm apoi } \cos A, \sin A:$$

$$\cos\frac{A}{2},\ \sin\frac{A}{2},\ \operatorname{tg}\frac{A}{2};\ BD = 2x;\ 2R = \frac{BD}{\sin A}.$$

De asemenea avem: $a = 2\sqrt{R^2 - \alpha^2}$ şi analogele.

9.63. Exprimînd pe y^2 din triunghiurile ABD şi BCD, obţinem:

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \text{ şi } y^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc},$$

$$\text{de unde } y = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},\ x = \sqrt{\frac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Făcînd produsul şi cîtul xy şi $\frac{x}{y}$, obţinem două relaţii remarcabile în patrulaterul inscriptibil.

9.64. Fie $\sphericalangle BCA = \beta$; $\sphericalangle BAC = \alpha$; $\sphericalangle CBD = \gamma$, $\sphericalangle CAD = \delta$; $a = 2R\sin\beta$; $b = 2R\sin\alpha$; $c = 2R\sin\delta$, deci:

$$\sin\beta = \frac{a}{2R};\ \sin\alpha = \frac{b}{2R};\ \sin\delta = \frac{c}{2R}, \text{ însă:}$$

$$A = \alpha + \delta;\ c = 180° - A;\ C = \gamma + \beta;\ \gamma = C - \beta$$

$$d = 2R\sin\gamma. \text{ Avem:}$$

$$\gamma + \beta = C;\quad \beta + \alpha = D;\ C + D = 2\beta + (\alpha + \gamma),$$

de unde $D = 2\beta + (\alpha + \gamma) - C$ etc.

9.65. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ poligonul. Proiectăm punctul M pe diametrele A_1A_{n+1}, $A_2A_{n+2}, \ldots, A_nA_{2n}$. Aria $MA_1A_{n+1} = MA_1\,MA_{n+1}\sin\varphi_1 = 2R \cdot MP_1$. (1)

Mai putem scrie:

$$MA_1^2 + MA_{n+1}^2 - 2MA_1 \cdot MA_{n+1} \cos\varphi_1 = 4R^2; \text{ însă:}$$

$$MA_1^2 + MA_{n+1}^2 = 2(a^2 + R^2), \text{ de unde:}$$

$$MA_1 \cdot MA_{n+1} \cdot \cos \varphi_1 = a^2 - R^2. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2R}{a^2 - R^2} \cdot MP_1 \ldots \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{2R}{a^2 - R^2} MP_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \varphi_k = \frac{4R^2}{(a^2 - R^2)^2} \sum_{k=1}^{n} MP_k^2 = \frac{2n R^2}{(a^2 - R^2)^2}.$$

9.66. $\cos A = -\cos(B + C) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \leqslant \sin A \sin B$, $\cos A \cos B + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C = -\cos A \cos (A + C) + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C =$ $= -\cos^2 A \cos C + \cos A \sin A \sin C + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C = -\cos^2 A \cos C +$ $+ \frac{1}{2} \sin C (\sin 2C + \sin 2A) = -\cos^2 A \cos C + \sin C \sin (A + C) \cos$ $(A - C) = -\cos^2 A \cos C + \sin C \sin B \cos (A - C) = \sin A \sin B \sin^2 C +$ $+ \cos A \cos C (\sin B \sin C - \cos A) = \sin A \sin B \sin^2 C + \cos A \cos B$ $\cos^2 C$.

Inegalitatea devine:

$$\sin A \sin B \sin^2 C + \cos A \cos B \cos^2 C - \sin A \sin B \sin C -$$
$$- \cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C (\sin C - 1) +$$

$+ \cos A \cos B \cos C (\cos C - 1) < 0$, deoarece $(\sin C - 1)$ și $(\cos C - 1)$ sînt negative sau cel mult zero, nu însă simultane nule.

9.67. $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$; $\cos B + \cos C = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} =$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leqslant 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} +$$

$$+ 2 \sin \frac{A}{2} + 1.$$

Acest trinom în $\sin \frac{A}{2}$ are maximum pentru:

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ adică } -2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

9.68. Dacă O este centrul cercului circumscris și G centrul de greutate, există relația:

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9 \cdot OG^2 \geqslant 0.$$

Înlocuim pe $a = 2R \sin A, \ldots$ și obținem relația cerută.

9.69. Se ține seama că într-un triunghi oarecare:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3 \sin \frac{A+B+C}{3}.$$

9.70. *Soluția I.* Avem $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}.$$

Deoarece $(b-c)^2 \geqslant 0$, rezultă $2\sin^2\frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{2bc}$, sau

$$0 < \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Analog $0 < \sin\frac{B}{2} < \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ și

$$0 < \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{C}{2\sqrt{ab}}.$$

Prin înmulțire obținem relația cerută.

Soluția II. Notînd cu m membrul stîng al inegalității, vom avea:

$$m = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Punînd apoi $\sin\frac{C}{2} = x$, obținem următoarea ecuație de gradul al doilea:

$$x^2 - x\cos\frac{A-B}{2} + 2m = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații trebuie să fie reale, deci trebuie să avem:

$$\cos^2\frac{A-B}{2} - 8m \geqslant 0, \text{ de unde:}$$

$$m \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

9.71. Din inegalitatea între numerele pozitive x, y, z,

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) > 0, \text{ putem înlocui:}$$

$$x = \operatorname{tg} A,\ y = \operatorname{tg} B,\ z = \operatorname{tg} C \text{ și } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C =$$

$$= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Obținem $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A \geqslant 9$.

9.72. Dacă $A_1 B_1 C_1$ este un triunghi ascuțitunghi, atunci: $\Sigma \operatorname{tg} A_1 \cdot \Sigma\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A_1}\right) \geqslant 0$ și

$$\operatorname{tg} A_1 + \operatorname{tg} B_1 + \operatorname{tg} C_1 = \operatorname{tg} A_1 \operatorname{tg} B_1 \operatorname{tg} C_1 \text{, de unde:}$$

$$\Sigma \operatorname{tg} A_1 \operatorname{tg} B_1 \geqslant 9, \text{ punînd } A = 90° - \frac{A_1}{2},$$

$$B = 90° - \frac{B_1}{2};\ C = 90° - \frac{C_1}{2}, \text{ obținem:}$$

$$\Sigma \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \geqslant 9.$$

9.73. *Soluția I.* Folosim relația

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

iar $\sin A \sin B \sin C = 8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$.

Inegalitatea devine:

$$\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \text{ sau:}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3};\ \operatorname{ctg}\frac{A}{2},\ \operatorname{ctg}\frac{B}{2},\ \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

sînt pozitive. Să arătăm că:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^2 \geqslant 27 \text{. Folosind relația}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \text{ rezultă}$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^3 \geqslant 27 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

care este adevărată, cunoscîndu-se inegalitatea:

$$(a + b + c)^3 \geqslant 27\ abc.$$

Soluția II. Folosim relația:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

Produsul este maxim cînd factorii sînt egali:

$$A = B = C, \text{ deci } \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{27} \text{ sau}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}, \text{ găsită la prima relație.}$$

$$9.74. \quad \Sigma(\sin A + \operatorname{tg} A) = \Sigma\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} + \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}\right) =$$

$$= 4\,\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}} > 4\,\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2} > 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Ţinem seama că:

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{A}{4}} > 1.$$

Unghiurile sînt ascuţite $(0 < \alpha < 90°)$; $\operatorname{tg}\alpha > 0$, deci:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} > \frac{A+B+C}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

9.75. Se foloseşte inegalitatea între numerele pozitive a, b, c

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9,$$

notăm: $a = \sin\frac{A}{2}$, $b = \sin\frac{B}{2}$, $c = \sin\frac{C}{2}$,

şi se ţine seama că $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$.

G.M.B. 1965, p. 248.

9.76. $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{2}\,[\cos(A-B) - \cos C]\cos C = k.$

Notînd $\cos C = x$, obţinem:

$$x^2 - \cos(A-B)\,x + 2k = 0$$

$$\Delta = \cos^2(A-B) - 8k \geqslant 0, \text{ de unde:}$$

$$k \leqslant \frac{1}{2}\cos^2(A-B) \leqslant \frac{1}{8}.$$

9.77. $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{l_a}$, unde h_a şi l_a sînt respectiv înălţimea şi bisectoarea duse din A

$$\Pi\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a h_b h_c}{l_a l_b l_c} \geqslant \frac{h_a h_b h_c}{r_a r_b r_c},$$

deoarece $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$,...; $r_a r_b = p(p-c)$,

deci $l_a l_b l_c = \frac{Sabc}{\Pi(b+c)} \cdot r_a r_b r_c$, însă:

$8abc \leqslant \Pi(b+c)$; fiindcă $2\sqrt{bc} \leqslant b+c,\ldots$

Mai știm că $r_a r_b r_c = \frac{R}{2r} h_a h_b h_c$, deci:

$$\Pi \cos\frac{B-C}{2} \geqslant \frac{h_a h_b h_c}{r_a r_b r_c} = \frac{2r}{R} = 8 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

9.78. Relația se mai poate scrie:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C}, \text{ unde:}$$

$\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sînt numere pozitive, inegalitatea fiind cunoscută.

9.79. $\Sigma \operatorname{cosec}^2\frac{A}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{2^6} = 12.$

Se ține seama că $1 + \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}$.

9.80. Avem $\Sigma \sec^2 A \geqslant 3\sqrt[3]{\sec^2 A \sec^2 B \sec^2 C} \geqslant 3\sqrt[3]{2^6} = 12.$

Se ține seama că $\operatorname{tg}^2 A + 1 = \sec^2 A$.

9.81. Inegalitatea se mai scrie:

$$m^2 \sin\frac{A}{2} - 2m\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2} \geqslant 0,$$

$$\Delta_m = \sin^2\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}\left(-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \leqslant 0.$$

Trinomul în m este deci de același semn cu $\sin\frac{A}{2}$, adică pozitiv.

9.82. *Soluția I.* Să arătăm că $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} > \cos\frac{C}{2}$ sau

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} > \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2},$$

evident, deoarece $\sin\frac{A}{2} < 1$ și $\sin\frac{B}{2} < 1$.

Soluția II. Inegalitatea devine:

$$\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} > \sqrt{c(p-c)} .$$

Ridicînd la pătrat și înlocuind $2p = a + b + c$, obținem:

$(c+b-a)\ (c+a-b) + 2\sqrt{ab(b+c-a)\ (c+a-b)} > 0$, care este evidentă.

Soluția III. Există triunghiuri $A_1B_1C_1$ în care $A_1 = 90 - \frac{A}{2}$; $B_1 = 90 - \frac{B}{2}$; $C_1 = 90 - \frac{C}{2}$; deoarece $A_1 + B_1 + C_1 = 180°$, iar $\cos A = \sin A_1$, $\cos B = \sin B_2$ și $\cos C = \sin C_1$, însă $\sin A_1$, $\sin B_1$, $\sin C_1$ sînt proporționale cu laturile a_1, b_1, c_1.

9.83. Folosim inegalitatea $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, cînd x, y, z sînt numere pozitive și relațiile:

$$\Pi \operatorname{tg} A = \Sigma \operatorname{tg} A \geqslant 3\sqrt[3]{\pi \operatorname{tg} A}\ , \text{ de unde:}$$

$$(\Pi \operatorname{tg} A)^{\frac{2}{3}} \geqslant 3, \text{ deci } \Pi \operatorname{tg} A \geqslant 3\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \geqslant 3\ (\Pi \operatorname{tg} A)^{\frac{n}{3}} \geqslant 3\ (3\sqrt{3})^{\frac{n}{3}} = 3\ (\sqrt{3})^n .$$

Dar ținînd seama de binomul lui Newton:

$$3\ (\sqrt{3})^n \cdot 3\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 3\left(1+\frac{n}{2}\right) = 3 + \frac{3n}{2}.$$

10.1. Din datele problemei se obține:

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

10.2. $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m-n}{m+n}$; $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{n}{m}$.

10.3. Din datele problemei se obține:

$$a=\frac{8}{\sqrt{2}\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}\sin\frac{45^\circ}{2}}.$$

Se calculează apoi catetele b și c.

10.4. Se calculează unghiul C, se exprimă laturile b și c și se înlocuiesc în $a+c-b=15$, obținîndu-se astfel ipotenuza a. Se calculează apoi catetele b și c.

10.5. Avem:

$$a(\sin B-\sin C)=d$$

sau

$$\sin\frac{B-C}{2}\cos 45^\circ=\frac{d}{a}$$

și deci:

$$\frac{B-C}{2}=\operatorname{arc\,sin}\frac{d}{a\sqrt{2}}.$$

Cunoscînd apoi suma și diferența unghiurilor B și C, se vor obține unghiurile și apoi laturile.

10.6. Din datele problemei se va obține și $a+c=\frac{b^2}{d}$, deci posibilitatea să aflăm laturile triunghiului.
Se calculează apoi unghiurile.

10.7. $$B = C = \frac{\pi}{4};\ b = c = 5,\ a = 5\sqrt{2}.$$

10.8. Ţinînd seama de teorema sinusurilor, se poate spune că dacă laturile sînt în progresie aritmetică, atunci şi unghiurile sînt în progresie aritmetică. În cazul triunghiului dreptunghic vom avea deci: $2 \sin B = \sin A + \sin C$.

10.9. Ţinînd seama de teorema sinusurilor, se poate spune că dacă laturile sînt în progresie geometrică şi unghiurile sînt în progresie geometrică. Din această observaţie se obţine:

$\sin^2 B = \sin A \sin C$ şi apoi se obţine, ţinînd seama că triunghiul este dreptunghic, $\sin C = \frac{1}{2} \sin 18°$.

10.10. Dacă se exprimă prin 1 înălţimea şi x raţia progresiei, laturile triunghiului pot fi exprimate prin x, x^2, x^3, cu condiţia $x^2 + (x^2)^2 = (x^3)^2$. Se obţine x şi apoi unghiurile, ţinînd seama că:

$$\sin B = \frac{1}{x^2} \text{ şi } \sin C = \frac{1}{x}.$$

10.11. Datele problemei duc la: $b + c = n$.

$$bc = \frac{10\, q^2 n^2 - 9\, q^2 - n^4}{4\,(5\, q^2 - n^2)}.$$

Din condiţia ca rădăcinile acestei ecuaţii să fie reale şi pozitive se obţine:

$$q < n < \frac{3\, q}{\sqrt{5}} \text{ şi } n > 3\, q.$$

10.12. Fie a lungimea ipotenuzei şi m lungimea bisectoarei. Din datele problemei se obţine:

$$m = a\sqrt{2}\, \frac{\sin B \sin C}{\sin B + \sin C}, \text{ de unde ecuaţia:}$$

$$2 \cos^2 \frac{B - C}{2} - 2\, \frac{m}{a} \cos \frac{B + C}{2} - 1 = 0.$$

Trebuie ca $\frac{B - C}{2} < \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{4}$; rădăcina negativă evident nu convine; iar cea pozitivă va trebui să fie cuprinsă între 1 şi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi de aici condiţia de posibilitate este $2m \leqslant a$.

10.13. Din datele problemei avem:

$$a^2 = b^2 + c^2,\ a + b + c = 2p;\ h = c \sin B = b \sin C = b \cos B,$$

de unde: $$\sin^2 2B = \frac{h(2p + h)}{p^2}.$$

Discuție. Deoarece $\sin 2B < 1$, trebuie ca

$$h(2p+h) < p^2 \text{ deci } h < p(\sqrt{2}-1)$$

10.14. Dacă se notează $a + b + c = 2p$, din datele problemei deducem:

$$\sin B + \sin C = \frac{p-R}{R}, \text{ întrucît } a = 2R \text{ etc.}$$

Discuție. $p \leqslant R(1+\sqrt{2})$.

10.15. Din datele problemei se va obține:

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{a+2r}{a\sqrt{2}}.$$

Discuție. Condiția de posibilitate este:

$$r \leqslant \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

10.16. Din datele problemei se va obține:

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{2(R+r)}{2R\sqrt{2}} = \frac{R+r}{R\sqrt{2}}.$$

Apoi $c = 2R\sin C$ și $b = 2R\sin B$.

10.17. Fie D mijlocul ipotenuzei BC, r, r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile BAC, ADB și ADC.

Avem: $r_1 = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$; $r_2 = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; $r^2 = 2r_1r_2$; $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r-r_1}{r_1}$;

$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r-r_2}{r_2}$ și apoi se exprimă laturile în funcție de r, r_1 și r_2.

Discuție. Condiția de posibilitate este $\frac{1}{2} < \frac{r_1}{r_2} < 2$.

10.18. a) $a = \frac{p^2-m^2}{p}$; $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{p^2+m^2}{p^2-m^2}$.

Se calculează apoi unghiurile și laturile b și c.

b) Ca să avem $a > 0$, va trebui ca $p > m$, iar pentru $B-C$ va trebui ca $p^2+m^2 \leqslant \sqrt{2}(p^2-m^2)$, adică:

$$p \geqslant m(1+\sqrt{2}).$$

10.19. Dacă se notează $AB = l$, se obține:

$$A = \alpha - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right);$$

$$BC = 2l\sin\frac{A}{2}.$$

10.20. Din datele problemei se obține:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{h-r}.$$

10.21. Fie $B=C$, în acest caz $B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$.

Avem $\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}=$

$$=2\sin\frac{A}{2}(1-\cos B)=2\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Raportul $\frac{r}{R}$ are valoare maximă dacă:

$$\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0,\text{ de unde}$$

$A=\frac{\pi}{3}$ și deci $B=C=\frac{\pi}{3}$, triunghiul căutat este echilateral.

Expresia $\frac{1}{2}-\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ are pe intervalul $[0, \pi]$ valoare minimă egală cu zero, pentru $A=0$, triunghiul degenerează într-un segment de dreaptă.

10.22. Se ține seama că $B=\frac{\pi}{2}-C$;

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3C\right)=\sin 3C;\ \sin C=\frac{c}{a}.$$

10.23. Se ține seama că $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}};\ \cos B=\frac{c}{a}\text{ și }\cos C=\frac{b}{a}.$$

10.24. Se aplică formulele de forma:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}};\text{ se fac operațiile și se obține:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

10.25. Avem $\frac{BM}{\sin 45^\circ} = \frac{l}{\sin B}$; $BM = \frac{l\sqrt{2}}{2 \sin B}$,

analog $CM = \frac{l\sqrt{2}}{2 \sin C} = \frac{l\sqrt{2}}{2 \cos B}$

$BM + CM = a = \frac{l\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\cos B}\right)$, de unde se află unghiul B.

10.26. $\sin B = \frac{h_c}{a}$: $\sin C = \frac{h_b}{a}$; $b = \frac{h_c}{\sin A}$; $c = \frac{h_b}{\sin A}$; $S = \frac{h_b h_c}{2 \sin A}$.

Este necesar $h_b \leqslant a$ și $h_c \leqslant a$.

Avem $h_b > h_c$ deci $C > B$.

$\log \sin B = \log 97 - \log 127 = \bar{1},88297$, $B = 49°47'54''$

$\log \sin C = \log 105 - \log 127 = \bar{1},91739$; $C = 55°,46'8''$.

Cazul I. $A = 74°25'58''$; $B = 49°47'54''$, $C = 55°46'8''$

$\log b = \log h_c - \log \sin A = 2,00301$; $b = 100,69$ m

$\log c = \log h_b - \log \sin A = 2,03743$; $c = 109$ m.

$\log S = \log h_b + \log h_c - \log \sin A - \log 2 = 3,72317$,
$S = 5286,50$ m^2.

Cazul II. $A = 5°58'13''$; $B = 49°47'54''$, $C = 124°13'53''$

$\log b = 2,96968$, $b = 932,56$ m

$\log c = 3,00410$; $c = 1009,5$ m

$\log S = 4.68984$; $S = 48960$ m^2.

Construim mai întîi segmentul $BC = a$, apoi pe BC ca diametru construim un cerc. Din punctele B și C ca centre descriem cercuri cu raze respectiv h_b și h_c.

10.27. Fie $\alpha = \sphericalangle AMB$, unde D este piciorul înălțimii, iar M mijlocul laturii BC. Avem $\sin \alpha = \frac{h_a}{m_a}$; unde $\alpha < 90°$,

$\log \sin \alpha = \log 63 - \log 71 = \bar{1}, 94808$; $\alpha = 62°32'15''$.

Fie $\sphericalangle MAB = u$. În triunghiul MAB avem

$$\operatorname{tg} \frac{B-u}{2} = \left[\frac{m_a - \frac{1}{2} a}{m_a + \frac{1}{2} a}\right] \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2};$$

$\log \operatorname{tg}\left(\frac{B-u}{2}\right) = \log 33,5 - \log 108,5 + \log \operatorname{ctg} 31°16'7'' = \bar{1}.70619.$

$B - u = 53°53'44''$, $B + u = 117°27'45''$, de unde:

$$B = 85°45'4'' \text{ şi } u = 31°47'$$

$$\log c = \log m_a + \log \sin \alpha - \log \sin B = 1{,}80810,\ c = 64{,}283 \text{ m}$$

Notăm $\sphericalangle MAC = v$. În triunghiul MAC avem:

$$\operatorname{tg} \frac{C - v}{2} = \frac{m_a - 0{,}5\, a}{m_a + 0.5\, a} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\log \frac{C - v}{2} = \log 33{,}5 - \log 108{,}5 + \log \operatorname{tg} 31°16'17'' = \bar{1}{,}27299$$

$$C - v = 21°14'19'';\ C + v = \alpha = 62°32'15''. \text{ De unde}$$

$$C = 41°53'17'',\ v = 20°38'57''.$$

$$\log b = \log m_a + \log \sin \alpha - \log \sin C = 1{,}97477,\ b = 94{,}356 \text{ m}$$

$$\sphericalangle A = u + v = 52°25'58'';\quad S = \frac{ah_a}{2};$$

$$\log S = 1{,}87506 + 1{,}79934 - 0{,}30103 = 3{,}37337;\ S = 2362{,}50\text{m}^2.$$

Construim mai întîi triunghiul dreptunghic AMD, apoi măsurăm $MB = MC = 0{,}5\, a$ şi obţinem vîrfurile B şi C.

10.28. $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C};\ \text{deci:}$$

$$\sin B - \sin C = \frac{d \sin A}{a} \text{ sau}$$

$$2 \sin \frac{B - C}{2} \cos \frac{B + C}{2} = 2 \sin \frac{B - C}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{d \sin A}{a} =$$

$$= \frac{2\, d \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{a};\ \sin \frac{B - C}{2} = \frac{d}{a} \cos \frac{A}{2}.$$

Cunoscînd pe $B - C$ şi $B + C$, rezultă unghiurile.

10.29. Fie înălţimea AD şi mediana AM. Avem:

$$\sin (AMD) = \frac{h_a}{m_a} < 1, \text{ apoi } DM = m_a \cos \alpha,$$

$$BD = \frac{a}{2} - DM;\quad AB^2 = BD^2 + h_a^2;\ \sin B = \frac{h_a}{AB}, \dots$$

10.30. $a + b + c = 2\, p,\ r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2};\quad S = \frac{bc \sin A}{2} = r_a\, (p - a)$

Soluţia I. $$b + c = 2\, p - a = \frac{2\, r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - a;$$

$$bc = \frac{2\, r_a\, (p - a)}{\sin A} = \frac{2\, r_a}{\sin A} \left(\frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - a \right) = \frac{r_a \left(r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)}{\sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Cunoscînd suma $b + c$ şi produsul bc formăm ecuaţia:

$$x^2 - \left(\frac{2\,r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} - a\right)x + \frac{r_a\left(r_a - a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\frac{A}{2}} = 0.\ \text{Apoi:}$$

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a};\quad \sin C = \frac{c\sin A}{a}.$$

2. *Soluţia II*. Folosim relaţiile $S = r_a\,(p - a) = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$

$$r_a = p\ \operatorname{tg}\frac{A}{2};\ \text{de unde:}$$

$$\sin B\ \sin C = \frac{4\,r_a\cos^2\frac{A}{2}\left(r_a - a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{a^2}.$$

Pe de altă parte:

$$\sin B\ \cos B = \frac{\cos\ (B - C) - \cos\ (B + C)}{2} = \frac{\cos\ (B - C) + \cos\ A}{2},$$

de unde:

$$\cos\ (B - C) = \frac{8\,r_a\cos^2\frac{A}{2}\left(r_a - a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{a^2} - \cos A.$$

Aflînd $B - C = \alpha$ şi $B + C = 180° - A$, rezultă B şi C, apoi laturile b şi c.

Se poate da şi o construcţie geometrică, care duce la discuţia problemei.

10.31. *Soluţia I.*

$$\text{Deoarece } \beta = \frac{a\sin C}{\sin\left(\frac{B}{2} + C\right)} \text{ şi } \gamma = \frac{a\sin B}{\sin\left(\frac{C}{2} + B\right)} \text{ şi cum}$$

$$2\sin B\sin C = \cos\ (B - C) - \cos\ (B + C) = \cos\ (B - C) + \cos\ A$$

$$2\sin\left(\frac{B}{2} + C\right)\sin\left(\frac{C}{2} + B\right) = \cos\frac{B - C}{2} + \sin\frac{3A}{2},\ \text{avem}$$

$$\beta\gamma = \frac{a^2\left[\cos\ (B - C) + \cos\ A\right]}{\cos\frac{B - C}{2} + \sin\frac{3A}{2}} = k^2,$$

și deoarece $\cos(B-C) = 2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1$, obținem:

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{k^2 + \sqrt{8a^2\left(2a^2\sin^2\frac{A}{2} + k^2\sin\frac{3A}{2}\right) + k^4}}{4a^2}.$$

$\sin\frac{3A}{2} > 0$, realizantul este pozitiv, cum radicalul mai mare decît k^2 se ia numai cu semnul + în fața radicalului. Mai trebuie $\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1$.

După aflarea diferenței $B - C$ se află B și C.

Soluția II. Se folosesc formulele:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc},$$

$$k^2 = \frac{4a^2bc\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(a+c)} = \frac{2abc(a+b+c)\sin\frac{A}{2}}{a^2+a(b+c)+bc}.$$

Se notează $b + c = x$ și $bc = y$ și se formează ecuațiile:

$$4y\cos^2\frac{A}{2} = x^2 - a^2$$

$$ak^2(x+a) + k^2y = 2ay(x+a)\sin\frac{A}{2};\quad x + a \neq 0,$$

de unde:

$$2a\sin\frac{A}{2}x^2 - k^2x + ak^2 - 2a^3\sin\frac{A}{2} - 4ab^2\cos\frac{A}{2} = 0;\quad x > a$$

și rezultă x și y, apoi a și b; $x > 0$ $y > 0$.

10.32. $b = 541$ cm; $c = 421$ cm; $A = 43°1'$; $S = 77710$ cm².

10.33. $c = 634{,}1$ cm; $A = 12°15'$; $B = 131°1'$; $S = 53830$ cm².

10.34. $b = 7{,}102$ cm; $B = 24°11'$; $C = 29°6'$; $S = 24$ cm².

10.35. $A = 16°26'$; $B = 30°24'$; $C = 133°10'$; $S = 235{,}6$ cm².

10.36. $B = 37°44'$; $C = 63°36'$; $a = 16{,}58$ cm; $b = 10{,}34$ cm.

10.37. $C = 47°26'$; $B = 37°4'$; $b = 38{,}46$ cm; $c = 47$ cm; $S = 897$ cm².

10.38. Se calculează a din relația:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ și deci } a = 2\sqrt{3}.$$

Se aplică apoi teorema sinusurilor. Se obține:

$$\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3};\quad \sin C = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

10.39. Avem $$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}.$$

Apoi $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$. Se aplică formulele de transformare în produse și se obține:

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = 1, \text{ de unde: } B - C = 90° \text{ și } B + C =$$

$$= 120°. \text{ Avem: } B = 105°; \ C = 15°.$$

10.40. Avem $B + C = 120°$ și se obține:

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ deci } B + C = 120° \text{ și } B - C = 60°.$$

10.41. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} A = 4\sqrt{3}$.

10.42. 9.

10.43. Din datele problemei se obține:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{m^2}{S} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \text{ și se va ține seama că:}$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90° - \frac{C}{2}.$$

10.44. Laturile sînt $x - 1$, x, $x + 1$.

Fie X unghiul cel mai mic.

Avem: $$\frac{x-1}{\sin X} = \frac{x}{\sin 3X} = \frac{x+1}{\sin 2X} = \frac{2}{\sin 2X - \sin X}.$$

Din egalitatea primului raport cu al treilea și al doilea cu al patrulea obținem:

$$\cos X = \frac{x+1}{2(x-1)} \text{ și } \cos X = \frac{x-2}{4}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x-2}{4} \text{ și deci } x = 5.$$

Laturile triunghiului sînt deci 4, 5, 6.

10.45. Ecuația problemei este:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84.$$

Însemnînd laturile cu $x - 1$, x, $x + 1$, se găsește $x = 14$. Laturile triunghiului sînt 13, 14, 15.

10.46. Există două soluţii:

a) $A = 90°;\ B = 67°30';\ C = 22°30'$

b) $A = 45°;\ B = 112°30';\ C = 22°30'.$

10.47. $a = 20$ cm, $c = 20$ cm, $b = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm,

$$A = C = 75°;\ S = 100 \text{ cm}^2.$$

10.48. $C = 15°;\ a = 8\sqrt{3};\ b = 8\sqrt{2};\ c = 8\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

10.49. Există două soluţii:

a) $A_1 = 75°44';\ C_1 = 87°12';\ a_1 = 220{,}2$ cm; $b_1 = 66{,}66$ cm.

b) $A_2 = 104°15';\ C_2 = 58°41';\ a_2 = 257$ cm; $b_2 = 77{,}94$ cm.

10.50. $A = 115°39';\ B = 25°40';\ C = 38°41';$

$a = 9{,}9$ cm, $b = 4{,}8$ cm; $c = 6{,}9$ cm.

10.51. $A = 26°34';\ B = 30°4';\ C = 123°22'$

$$a = \frac{h_c}{\sin B} = 71{,}84 \text{ cm}, \qquad c = \frac{h_b}{\sin A} = 134{,}16 \text{ cm};$$

$$b = 80{,}49 \text{ cm}.$$

10.52. Există două soluţii.

1) $A_1 = 27°16';\ B_1 = 63°42';\ C_1 = 89°2',\ c_1 = 50{,}19$ cm;

2) $A_2 = 27°16';\ B_2 = 116°18';\ C_2 = 36°26',\ c_2 = 29{,}81$ cm.

10.53. $A = 30°24';\ B = 99°45';\ C = 49°51',\ a = 50{,}32$ cm.; $S = 1884$ cm².

10.54. $AH = 2R \cdot \cos A.$

10.55. Se prelungeşte mediana CD cu segmentul $DE = CD$ şi se uneşte B cu E. Se calculează din triunghiul CBE unghiul CBE. Se obţin apoi:

$$A = 83°25';\ B = 36°35';\ C = 60°;\ c = 17{,}43 \text{ cm}.$$

10.56. Din compararea ariilor triunghiului care s-au format, obţinem

$$\frac{bc}{2}\sin A = \frac{b \cdot l_a}{2}\sin\frac{A}{2} + \frac{c \cdot l_a}{2} - \sin\frac{A}{2}$$

de unde găsim $\cos\frac{A}{2} = \frac{(b + c)\, l_a}{2bc}$.

Apoi avem:

$$A = 135°11';\ B = 27°7';\ C = 17°42';\ a = 64{,}93 \text{ cm}.$$

10.57. Din datele problemei se obţine ecuaţia:

$$2h_a \sin(B + C) + a\cos(B + C) = a\cos\alpha$$

din care se obţine suma $(B + C)$.

10.58. Din relația

$a = 2R \sin A$ se deduce unghiul A, iar din egalitatea $h_b = a \sin C$ se obține unghiul C.
Discuție. Condiția de posibilitate a problemei este $h_b < a < 2R$.

10.59. Se ține seama că $S = p(p - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ și că $a + b + c = 2p$. Se obține:

$$c = \frac{S \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{k} - k.$$

Apoi $$\cos \frac{A - B}{2} = \frac{2k + c}{c} \sin \frac{C}{2} = \frac{S + k^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{S - k^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}} \sin \frac{C}{2}.$$

Condiția de posibilitate este:

$$S \geqslant k^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2} \, \frac{1 + \sin \frac{C}{2}}{1 - \sin \frac{C}{2}}.$$

10.60. Din $p - a = p \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = pm^2$, deducem $a = p(1 - m^2)$ iar

$$\cos \frac{C - B}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}} \sin \frac{A}{2} = \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \sin \frac{A}{2}.$$

Pentru posibilitate trebuie ca $\cos \frac{B + C}{2} < \cos \frac{B - C}{2} < 1$ sau:

$\sin \frac{A}{2} < \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \sin \frac{A}{2} < 1$ de unde deducem:

$$m < \frac{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}$$ care cuprinde:

și condiția $m < 1$.

10.61. b^2 și c^2 sînt rădăcinile ecuației

$$X^2 - 2(m^2 + a^2)X + \left(\frac{m^2 - a^2}{\cos A}\right)^2 = 0$$

condițiile de posibilitate sînt:

$$a < m < a \text{ ctg } \frac{A}{2} \text{ cînd } A < \frac{\pi}{2} \text{ și}$$

$$a \text{ ctg } A < m < a \text{ cînd } A > \frac{\pi}{2}.$$

Dacă $A = \frac{\pi}{2}$, b și c sînt nedeterminați, ceea ce se poate și din datele problemei, căci atunci $m = a = R$.

10.62. Fie $BC = a$, $BD = d$, și 2φ unghiul ABC. Ecuația problemei este: $4\cos^2\varphi - 2\frac{a}{d}\cos\varphi \,.\, 1 = 0$.

Rădăcina pozitivă ne dă unghiurile B și C, iar $A = \pi - 4\varphi$; trebuie deci ca $\varphi < \frac{\pi}{4}$, adică $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\varphi < 1$, sau $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{a}{d} < \frac{3}{2}$.

10.63. Teorema sinusurilor ne dă:

$$(m + n) \text{ tg } \frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2} - (m - n)\cos\frac{A-B}{2} = 2\,(m - n)\sin\frac{C}{2}$$

Punînd, $\text{tg } \varphi = \frac{m-n}{m+n} \text{ ctg } \frac{C}{2}$, (1)

$$\text{obținem: } \sin\left[\frac{A-B}{2} - \varphi\right] = 2\sin\varphi \sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Dacă α este un unghi pozitiv, mai mic ca 90°, astfel ca: $\sin\alpha = 2\sin\varphi \sin\frac{C}{2}$, avem $A - B = 2\varphi + 2\alpha$, deci $A = 90° - \frac{C}{2} + \alpha + \varphi$. $B = 90° - \frac{C}{2} - \alpha - \varphi$, iar soluția $\frac{A-B}{2} = \varphi + (180° - \alpha)$ este imposibilă, întrucît dă pentru $\frac{A-B}{2}$ o valoare mai mare ca 90°.

Problema nu poate avea deci mai mult de o soluție.

Pentru ca această soluție să existe trebuie mai întîi ca $2\sin\varphi \sin\frac{C}{2} < 1$. (3); ceea ce-i satisfăcut, căci din (1) deducem

$\text{tg } \varphi < \text{ctg } \frac{C}{2}$, $\varphi < 90° - \frac{C}{2}$ (4), și prin urmare (3) se reduce la

$$2\sin\varphi \sin\frac{C}{2} < \sin C < 1.$$

Mai trebuie apoi ca A și B să fie pozitivi și $A + B < 180°$. Prima și ultima condiție sînt îndeplinite; pentru a doua trebuie ca $\alpha < \left(90° - \frac{C}{2}\right) - \varphi$.

Ambii membri ai acestei inegalități fiind pozitivi în virtutea lui (4), putem scrie

$$\sin\ \alpha < \sin\left[\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) - \varphi\right],\ \text{de unde}$$

$$\operatorname{tg}\ \varphi < \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},\ \text{sau}\ m < 2n.$$

10.64.
$$(b+c)^2 = \frac{k^2(1+\cos A) - a^2}{\cos A}.$$

$$(b-c)^2 = \frac{a^2 - k^2(1-\cos A)}{\cos A}.$$

Trebuie ca $(b+c)^2 > 0$, $(b-c)^2 > 0$ și $b - c < a < b + c$; deci dacă $A < 90^\circ$ trebuie să avem $k\sqrt{2} - \sin\frac{A}{2} < a < k$, iar dacă $A > 90^\circ$; $k < a < k\sqrt{2}\ \sin\frac{A}{2}$.

10.65. Avem:

$$a = \frac{2r^2}{(h_a - 2r)\operatorname{tg}\frac{A}{2}};$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a - r}{r}\sin\frac{A}{2}.$$

Condiția de posibilitate:

$$2r < h_a < r\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

10.66. Se va calcula $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$.

10.67. Dacă h_a este înălțimea corespunzătoare laturii a, găsim:

$$\cos\frac{B+C}{2} = \frac{r}{\sqrt{2R(h-2r)}};\ \cos\frac{B-C}{2} = \frac{h-r}{\sqrt{2R(h-2r)}}.$$

Cunoaștem unghiurile și înălțimea h.

Pentru a găsi condițiile de posibilitate ale problemei, este destul să se exprime că $\cos\frac{B-C}{2}$ este real și mai mic ca $+1$.

Pentu aceasta este necesar și suficient să avem

$$R + r - \sqrt{R(R-2r)} \leqslant h \leqslant R + r + \sqrt{R(R-2r)}\ \text{iar}\ R > 2r.$$

10.68. Pentru bisectoarele date se cunosc relațiile:

$$l = \frac{2bc}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\quad m = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}.$$

10.69. Se vor folosi formulele:

$$a = 2R \cdot \sin A \text{ și } r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

10.70. Din relația

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ se obține: } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{2(b + c - a)}.$$

10.71. $a = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}}; \quad b = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin C}}; \quad c = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B}}.$

10.72. Relațiile: $2S = a = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot b_c$ se pot scrie:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

ceea ce arată că triunghiul este asemenea cu un triunghi ale cărui laturi sînt inversele înălțimilor date și deci unghiurile triunghiului vor fi egale cu unghiurile triunghiului cu laturile egale cu inversele înălțimilor.

Apoi laturile se vor calcula cu ajutorul relațiilor de forma $2S = ab \sin C = b \cdot h_b$, de unde:

$$a = \frac{h_b}{\sin C}$$

și deci:

$$b = \frac{h_c}{\sin A}; \quad c = \frac{h_a}{\sin B}.$$

10.73. Avem:

$$\frac{2p}{r} = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Pentru determinarea unghiurilor B și C se obține sistemul

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2p}{r} \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se ține seama de relația:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} \text{ de unde}$$

$a = p - r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$; apoi $b + c = 2p - a$ și pentru determinarea unghiurilor B și C se rezolvă sistemul:

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a} \sin \frac{A}{2}$$

$$\frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}; \quad B > 0 \text{ și } C > 0.$$

10.74. Avem

$$\frac{h_b + h_c}{b + c} = \frac{\sin A \sin C + \sin A \sin B}{\sin B + \sin C} = \sin A$$

de unde $\sin A = k$ şi $A = \arcsin k$; $C = \pi - A - B$.

Pentru ca problema să aibă soluţii, este necesar să avem $0 < k < 1$. Avem apoi:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \text{ de unde}$$

$$a = \frac{r \sin A}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A + B}{2}}.$$

În mod analog se calculează şi celelalte laturi.

10.75. Fie

$$k = \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 + m_b^2} \text{ şi avem:}$$

$$k = \frac{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) - (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)}{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) + (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)} =$$

$$= \frac{3 \sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 B + 4 \sin^2 C + \sin^2 A}.$$

Se ţine seama apoi că

$\sin^2 B - \sin^2 A = \sin (A + B) \sin (B - A) = \sin (B - A) \sin C$
şi $\sin^2 B + \sin^2 A = 1 - \cos (A + B) \cos (A - B) = 1 + \cos C \cos (B - A)$
şi obţinem:

$$k = \frac{3 \sin C \sin (B - A)}{1 + \cos C \cos (B - A) + 4 \sin^2 C}.$$

Această ecuaţie liniară în raport cu $\sin (B - A)$ şi $\cos (B - A)$ împreună cu ecuaţia $A + B = \pi - C$ şi cu inegalităţile $A > 0$ şi $B > 0$ formează sistemul pentru aflarea unghiurilor.

10.76. Se notează cu α unghiul CAB. Se obţine:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 3h^2}}{3h}.$$

10.78. Folosim relațiile sinusului și prima relație devine:

$$\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2\sin(A-B)} + \cos C = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{\sin(A-B)\cos(A+B)}{\sin(A-B)} + \cos C = \cos(A+B) + \cos C = 0.$$

Relația a doua devine:

$$\frac{2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin 2A - \sin 2B} + \operatorname{tg} C = \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin(A-B)\cos(A+B)} +$$

$$+ \operatorname{tg} C = \frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin(A-B)\cos(A+B)} + \operatorname{tg} C =$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A-B)\cos(A+B)} + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg}(A+B) + \operatorname{tg} C = 0.$$

10.79. $\frac{AD}{BD} = |\operatorname{tg} B|$; $\frac{AD}{DC} = |\operatorname{tg} C|$, de unde:

$$AD^2 = BD \cdot DC\,|\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C|.$$

10.80. Prin A se duce o dreaptă AA', astfel că $\sphericalangle BAA' = \alpha$. Se proiectează conturul ABC pe dreapta AA' și se obține relația cerută.

10.81. Relația se mai scrie:

$$\sum(\sin B - \sin C)\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \frac{1}{2}\sum \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \frac{-1}{4}\sum(\cos B - \cos C) = 0.$$

10.82. $AB = 2R\sin C$; $AC = 2R\sin B$, $A_1C = 2R\cos B$.

$$\frac{2R(\sin C - \sin B)}{2R(\cos B - \cos C)} = \frac{2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{2\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{C+B}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

10.83. Folosim relațiile: $\sin A = \frac{2S}{bc}$ și $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

10.84. Fie triunghiul ABC, I centrul cercului înscris, A_1, B_1, C_1 punctele de tangență. Avem: $a = BA_1 + A_1C$ sau

$$a = r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right),$$

$$2p = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = 2r\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\ \operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

10.85. Avem $r_a = p\ \text{tg}\ \frac{A}{2}$, $p = R\Sigma \sin A = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$, de unde rezultă $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

10.86. $A'A_1 = R\,|\sin (B - C)|$; $HA' = 2R \cos B \cos C$.

$$\frac{A'A_1}{HA'} = \frac{|\sin (B-C)|}{2 \cos B \cos C} = \frac{1}{2}\,|\,\text{tg}\ B - \text{tg}\ C\,|.$$

10.87. $$\frac{\text{tg}\,(A - B)\ \text{tg}\ C}{1 + \sec (A - B) \sec C} = \frac{\sin (A - B) \sin C}{1 + \cos (A - B) \cos C} =$$

$$= \frac{\sin (A - B) \sin (A + B)}{1 - \cos (A - B) \cos (A + B)} = \frac{\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{1 - \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 A} =$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A - \sin^2 B} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

10.88. Folosim relațiile $r_a = \frac{S}{p - a}, \ldots abc = 4RS$.

10.89. Fie $AD = i_a$. Avem $2S_{ABD} + 2S_{ADC} = 2S_{ABC}$ deci:

$$c \cdot i_a \sin \frac{A}{2} + b i_a \sin \frac{A}{2} = bc \sin A \text{ sau}$$

$$(b + c)\ i_a \sin \frac{A}{2} = 2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, \text{ de unde rezultă } i_a.$$

10.90. Se folosesc formulele $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}}$ și analogele

$$S = p \cdot r = \sqrt{p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)} = \frac{abc}{4R}.$$

Relația a doua se mai scrie

$\Sigma\ \text{ctg}\ A\ \text{ctg}\ B = 1$. Se folosește și relația

$$\text{ctg}\ C = -\text{ctg}\ (B + C).$$

10.91. Se folosesc relațiile $r_a = p\ \text{tg}\ \frac{A}{2}, \ldots$

10.92. Notăm $PA_1 = \frac{m_a}{n}$, iar din triunghiurile BPA_1 și BAA_1 obținem:

$$BP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{m_a^2}{n^2} - 2\,\frac{a}{2}\,\frac{m_a}{2} \cdot \frac{\frac{a^2}{4} + m_a^2 - c^2}{2\,\frac{a}{2}\,m_a} =$$

$$= \frac{n-1}{4n} a^2 - \frac{n-1}{n^2} m_a^2 + \frac{c^2}{n}.$$

Analog avem:

$$CP^2 = \frac{n-1}{4n} a^2 - \frac{n-1}{n^2} m_a^2 + \frac{b^2}{n}.$$

Se mai verifică uşor relaţia cunoscută:

$$\frac{\sin (B-C)}{\sin (B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2},$$

care aplicată în triunghiul PBC, ne dă:

$$\frac{\sin (\beta-\gamma)}{\sin (\beta+\gamma)} = \frac{CP^2 - BP^2}{BC^2} = \frac{b^2-c^2}{na^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin (B-C)}{\sin (B+C)}.$$

10.93.
$$\frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin B + \sin C}{2 \sin C \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin C \cos \frac{A}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin C} = \frac{\sin \left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{B-C}{2}\right)}{\sin (180^\circ - C)} = \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + C\right)}{\sin (A+B)}.$$

10.94. a)
$$m_a^2 = a^2 = \frac{2\ (b^2+c^2) - a^2}{4}; \qquad (1)$$

$$2(b^2 + c^2 - a^2) = 3a^2 \text{ sau } 4\, bc \cos A = 3a^2$$
$$16\ R^2 \sin B \sin C \cos A = 12\ R^2 \sin^2 A, \text{ deci}$$
$$4 \sin B \sin C \cos A = 3 \sin^2 A.$$

b) Tot din (1) obţinem:

$$5a^2 = 2b^2 + 2c^2 \text{ sau}$$
$$5 \sin^2 A = 2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C, \text{ de unde:}$$
$$5(1 - \cos^2 A) = 2(1 - \cos^2 B) + 2(1 - \cos^2 C); \text{ deci:}$$
$$1 + 2 \cos^2 B + 2 \cos^2 C = 5 \cos^2 A.$$

c) Relaţia precedentă se mai scrie:

$$3 + (2 \cos^2 B - 1) + (2 \cos^2 C - 1) = 5\ (1 - \sin^2 A), \text{ de unde:}$$
$$\cos 2B + \cos 2C + 5 \sin^2 A = 2.$$

10.95. Fie α unghiul format de direcţia AM cu cateta AC. Notăm $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Din relaţiile:

$$MC = \frac{b \sin \alpha}{\sin (C+\alpha)}; \quad MB = \frac{c \cos \alpha}{\sin (C+\alpha)}; \quad AM = \frac{b \sin C}{\sin (C+\alpha)}$$

rezultă relaţia din enunţ.

10.96. Se ţine seama de relaţiile:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A; \quad a = b \cos C + c \cos A.$$

10.97. Se ține seama de relațiile:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2};\ \sin 2A=2\sin A\cos A$$

și se obține relația cerută.

10.98. Se va ține seama că $A=\pi-(B+C)$ și se va obține:
$1+\cos A\cos(B-C)=1-\cos(B+C)\cos(B-C)=\sin^2 B+\sin^2 C$. Se va ține seama apoi de teorema sinusurilor și de formula razei cercului circumscris.

10.99. Se înlocuiesc $\cos B$ și $\cos C$ în funcție de laturi.

10.100. Se înlocuiesc a, b și c prin $\sin A$, $\sin B$ și $\sin C$; se observă apoi că $\sin B+\sin C-\sin A=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

10.101. Se înlocuiește $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc};\ \text{la fel și}\ \cos^2\frac{B}{2}\ \text{și}\ \cos^2\frac{C}{2}.$$

10.102. Se folosesc relațiile de forma:

$$\cos^2=\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}.$$

10.103. Se folosesc relații de forma:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}.$$

10.104. Teorema sinusurilor dă în primul membru:

$\frac{\sin B\cdot\sin C}{bc}$; iar în membrul al doilea avem:

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C.$$

10.105. Se ține seama de relațiile de forma:

$$\frac{1}{a}(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)=\frac{\sin A}{a}\cdot\frac{\sin A}{\sin A\sin B\sin C}$$

și de formula care dă raza cercului înscris și că:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}.$$

10.106. Se va ține seama de formulele care dau raza cercului circumscris și raza cercului înscris.

10.107. Egalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$$\frac{R}{r}=\frac{\sum a^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{\sum a^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)} \quad \text{și}$$

fiindcă $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2}{\sin A}$ și $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2\cos A}{\sin A}$ avem:

$$\frac{R}{r}=\frac{2p}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\frac{p}{a\sin B\sin C}=\frac{p\cdot a\cdot b\cdot c}{4\cdot S^2}.$$

10.108. Se ține seama de formulele care dau razele cercurilor exînscrise și de relațiile sinusurilor și obținem

$$a\operatorname{tg}B-2r_c=\frac{8R\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos B}$$

și relațiile asemănătoare pentru celelalte paranteze.

10.109. Triunghiurile ABC, B_1BA, A_2AC, BB_1C, AB_2B ACC_1, CBC_2 sînt asemenea.

$$AA_1=\frac{bc}{a},\ldots,\ CA_1=BA_1-a=\frac{c^2-a^2}{a};\ BA_2=a-\frac{b^2}{a},\ldots$$

$$AA_1=\frac{bc}{a},\ldots,\ CA_1=BA_1-a=\frac{c^2-a^2}{a};\ BA_2=a-\frac{b^2}{a},\ldots$$

$$A_1A_2=CA_2+CA_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{a}=\frac{2\,bc\cos A}{a}.$$

Rezultă relațiile din enunț.

10.110. Înmulțim relația $a=b\cos C+c\cos B$ cu $\sin\theta$ și apoi adunăm cu $b\sin C\cos\theta-c\sin B\cos\theta=0$ și obținem relația cerută.

10.111. Avem $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ și analogele.

Adunînd aceste relații obținem:

$$bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Știind că $a=2R\sin A$ și analogele, obținem:

$$\Sigma\, bc\cos A=2R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C).$$

Însă $\Sigma\sin^2A=2(1+\cos A\cos B\cos C)$.

Împărțim cu $abc=4RS$ și obținem relația cerută.

10.112. $a=2R\sin A=2R\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{2A}{3}\right)$, avem:

$$\sin A = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{2A}{3} + 2\cos\frac{A}{3}\sin\frac{A}{3}\cos\frac{A}{3} =$$

$$= \sin\frac{A}{3}\left(\cos^2\frac{A}{3} + 2\cos^2\frac{A}{3}\right) = 2\sin\frac{A}{3}\left(\cos\frac{2A}{3} + 1\right) =$$

$$= 2\sin\frac{A}{3}\left(\cos\frac{2A}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{A}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{A}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{3}\right) = 4\sin\frac{A}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right).$$

10.113. În triunghiul PA_1A_2 avem: $\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{\sin a_2}{\sin b_1}$.

În triunghiul PA_2A_3 avem $\frac{PA_2}{PA_3} = \frac{\sin a_3}{\sin b_2}$, iar în triunghiul PA_3A_1 avem

$$\frac{PA_3}{PA_1} = \frac{\sin a_1}{\sin b_3}.$$

Prin înmulţire obţinem:

$$\sin b_1 \sin b_2 \sin b_3 = \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3.$$

Generalizare. Avem succesiv:

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{\sin a_2}{\sin b_1}; \quad \frac{PA_2}{PA_3} = \frac{\sin a_3}{\sin b_2}; \quad \ldots$$

$$\frac{PA_n}{PA_1} = \frac{\sin a_1}{\sin b_n}.$$

Prin înmulţire obţinem:

$$\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n = \sin b_1 \sin b_2 \ldots \sin b_n.$$

10.114. Folosim relaţiile $abc = 4\,RS$; $ah_a = 2S$, $a = 2R\sin A$,

$$\sum h_a = \sum\frac{2S}{a} = 2R\sum\sin B\sin C = R\left[\sum\cos(B-C) - \sum\cos(B+C)\right] =$$

$$= R\left[\sum\cos A + \sum\cos(B-C)\right].$$

10.115. Avem $\frac{a^2}{1-\cos^2 A} = \frac{b^2}{1-\cos^2 B} = \ldots$, $a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$.

10.116. Folosim formulele $a = 2R\sin A$; $HA = 2R\cos A$,

$$E = 4\,R^2\,\Sigma\sin A\cos A = 2\,R^2\,\Sigma\sin 2A = 8\,R^2\sin A\sin B\sin C = 4S.$$

10.117. Prima parte se scrie succesiv:

$$b\cos\frac{B}{4}+a\cos\left(B-\frac{3B}{4}\right)+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=$$

$$=c\cos\frac{B}{4}+a\left(\cos B\cos\frac{3B}{4}+\sin B\sin\frac{3B}{4}\right)+$$

$$+b\left(\cos A\cos\frac{3B}{4}-\sin A\sin\frac{3B}{4}\right)=c\cos\frac{B}{4}+$$

$$+\cos\frac{3B}{4}(a\cos B+b\cos A)+\sin\frac{3B}{4}(a\sin B-b\sin A)=$$

$$=c\cos\frac{B}{4}+c\cos\frac{3B}{4}=c\left(\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{3B}{4}\right)=2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}.$$

10.118. *Soluția I.*

$$\frac{\cos B+\cos C-\sin B-\sin C}{1-\sin A-\cos A}=\frac{\cos B-\sin B-\cos(A+B)-\sin(A+B)}{1-\sin A-\cos A}=$$

$$=\frac{\cos B(1-\sin A-\cos A)-\sin B(1-\sin A+\cos A)}{1-\sin A-\cos A}=$$

$$=\cos B+\sin B\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1},$$

însă $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$

și rezultă astfel relația din enunț.

Soluția II. Partea I se mai scrie:

$$\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}=$$

$$=\cos B+\sin B\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

10.119. Folosim:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},\ldots$$

$$\sum\frac{a}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{pabc}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2abc}{S^2}=\frac{abc}{r^2}=$$

$$=\frac{4Rpr}{r^2}=\frac{4Rp}{r}=4R\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

10.120. *Soluția I.* Fie AD și AD' bisectoarea interioară și exterioară

$$\sphericalangle AD'B = \sphericalangle B - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{B-C}{2}.$$

$$l_a = l_a' \operatorname{tg} \frac{B-C}{2}.$$

Soluția II. $\frac{l_a}{l_a'} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} : \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{b-c} =$

$$= \frac{b-c}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

10.121. Desfacem $\sin(A-\alpha)$ și înlocuim pe $a = 2R\sin A,\ldots,$ Obținem $\sin A\cos B\sin C + \sin^2 B = \cos A\sin B\sin C + \sin^2 A =$

$$= \sin A\sin B\cos C + \sin^2 C.$$ Într-adevăr avem:

$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin C \sin(A-B)$ sau

$$\sin^2 A + \cos A\sin B\sin C = \sin^2 B + \sin A\cos B\sin C.$$

În același mod:

$$\sin^2 A + \cos A\sin B\cdot\sin C = \sin^2 B + \sin A\cos B\sin C.$$

10.122. Fie x latura triunghiului echilateral MNP, avem:

$$\frac{AM}{\sin\frac{C}{3}} = \frac{AP}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}; \quad \frac{x}{\sin\frac{B}{3}} = \frac{c}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{B}{3}\right)}$$

însă $b = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60^\circ - \frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right)$ și

$$c = 8R\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ - \frac{C}{3}\right)\sin\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right);$$

$$AN = \frac{b\sin\frac{C}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{C}{3}\right)} = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right);$$

$$AP = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right).$$

Aplicînd relația $NP^2 = x^2 = AN^2 + AP^2 - 2AN\cdot AP\cos\frac{A}{3}$ rezultă relația cerută.

10.123. $r_a\,(p-a) = r_b\,(p-b) = r_c\,(p-c) = S$

$$2r_b\,r_c - bc = 2\frac{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{(p-b)\,(p-c)} - bc =$$

$$= 2p\,(p-a) - bc = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos A,$$

folosind şi relaţia sinusurilor rezultă relaţia cerută şi alte două analoge.

10.124. Se ţine seama de relaţiile:

$$r_a = \sqrt{\frac{p\,(p-b)\,(p-c)}{p-a}} = \frac{S}{p-a} p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \text{ şi analogele.}$$

10.125. Relaţia se mai scrie:

$$R \cos A + R \cos B + R \cos C = R + r.$$

$R \cos A$, $R \cos B$, $R \cos C$ sînt distanţele de la O la BC, CA, AB.

Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui O pe laturi.

Din patrulaterul inscriptibil OB_1AC_1, conform teoremei lui Ptolomeu, avem:

$$OB_1 \times AC_1 + OC_1 \times AB_1 = OA \times B_1C_1,$$

$$R \cos B \times \frac{c}{2} + R \cos C \times \frac{b}{2} = R \times \frac{a}{2} \text{ şi analogele.}$$

Adunînd relaţiile:

$$R \cos B \times c + R \cos c \times b = Ra,$$
$$R \cos C \times a + R \cos A \times c = Rb,$$
$$R \cos A \times b + R \cos B \times a = Rc,$$

obţinem:

$$R \cos A\,(2p-a) + R \cos B\,(2p-b) + R \cos C\,(2p-c) = 2\,pR$$

sau $2\,pR\,(\cos A + \cos B + \cos C) = 2\,pR + 2S$ deoarece $\Sigma\, Ra \cos A =$
$= 2S = 2pr.$

Rezultă $(\cos A + \cos B + \cos C)\,R = R + r$.

10.126. *Soluţia I.* Dacă AD şi AM sînt înălţimea şi mediana duse din A, observăm că:

$$\text{aria } ADB + \text{aria } ADC = S$$
$$\text{aria } ADB - \text{aria } ADC = 2 \text{ aria } ADM$$

$$\text{aria } ADB = \frac{BD \times AD}{2} = \frac{c^2 \sin B \cos B}{2} = \frac{c^2 \sin 2B}{4};$$

$$\text{aria } ADC = \frac{b^2 \sin 2C}{4}, \text{ de unde rezultă prima relaţie.}$$

$$\text{aria } ABD = \frac{c^2 \sin 2B}{4}; \text{ aria } ADC = \frac{b^2 \sin 2C}{4};$$

$$\text{aria } ADM = \frac{(BD - DC)\, AD}{2} = \frac{bc \sin (C - B)}{2}.$$

Soluția II. Folosim relațiile $b = 2R \sin B, \ldots,$ $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B =$

$$= 4R^2 \sin^2 B \cdot 2 \sin C \cos C + 4R^2 \sin^2 C \sin 2B =$$

$$= 8R^2 \sin A \sin B \sin C = 4S.$$

La fel $b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2\, bc \sin (B - C)$.

10.127. Se folosesc relațiile $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$; $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \ldots.$

10.128. *Soluție.* Avem $2S = ad_a + bd_b + cd_c$; $d_a = R \cos A, \ldots$ $abc =$ $= 4RS$, $a = b \cos A + a \cos B, \ldots$

$$\Sigma\, a^3 d_a = 2S\, (a^2 + b^2 + c^2) - \Sigma\, ab\, (bd_a + ad_a) = 2S\, (a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2).$$

Observare. Se mai pot folosi relațiile:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ldots..$$

$16\, S^2 = 2\, \Sigma\, a^2 b^2 - \Sigma a^4$ sau încă relațiile:

$a = 2R \sin A$, $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

În fine, se mai poate arăta relația cerută înlocuind totul în funcție de raza R și laturile a, b, c.

10.129. Ținem seama de relațiile:

$$\Sigma \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \ \Sigma \cos A = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \ \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr. \text{ Rezultă:}$$

$$\Sigma \sin A = \frac{p}{R}; \ \Sigma \cos A = 1 + \frac{r}{R}; \ \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r},$$

precum și relația din enunț.

10.130. $\sin C = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}$; $\operatorname{tg} \dfrac{C}{2} = \operatorname{ctg} \left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} \right) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}$;

$$\sin C = \frac{2\,(m_1 n_2 + m_2 n_1)\,(m_2 n_2 - m_1 n_1)}{(m_1 n_2 + m_2 n_1)^2 - (m_2 n_2 - m_1 n_1)^2}.$$

10.131. Fie AA' înălţimea din A, iar A'' mijlocul arcului BC.

$$\sphericalangle A'AA_1 = B - C;\ AA_1 = \frac{AA'}{\cos(B-C)} = \frac{AB\sin B}{\cos(B-C)} =$$

$$= \frac{2R\sin C\sin B}{\cos(B-C)},\ \text{deci: } \frac{1}{AA_1} = \frac{\cos(B-C)}{2R\sin B\sin C} = \frac{1}{2R}(\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C + 1).$$

10.132. Fie triunghiul ABC, I centrul înscris şi D, E, F punctele de contact. Fie S_a, S_b, S_c, ariile triunghiurilor AEF, BFD, CDE; S_1 aria triunghiului DEF şi S aria ABC.

Avem $AF = AE = p - a$; $BD = BF = p - b$ şi $CD = CE = p - c$.

$$\frac{S_a}{S} = \frac{(p-a)^2\sin A}{2} : \frac{bc\sin A}{2} = \frac{(p-a)^2}{bc}.$$

$$\sum\frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{S_a+S_b+S_c}{S};\ \frac{S_1}{S} = \sum\frac{\text{aria }(IEF)}{S} = \sum\frac{r^2\sin A}{2R} =$$

$$= \frac{r^2}{2S}\sum\frac{a}{2R} = \frac{r^2 2p}{4RS} = \frac{r}{2R}.$$

$$\frac{S_a+S_b+S_c}{S} = \frac{S-S_1}{S} = 1 - \frac{S_1}{S} = 1 - \frac{r}{2R} = \frac{2R-r}{2R}.$$

10.133. Folosim relaţiile $p\operatorname{tg}\frac{A}{2} = r_a, \ldots,\ r_a + r_b + r_c = 4R + r$,

$r_a r_b r_c = p^2 r$. Partea întîi devine $4(R + r)$.

Pentru partea a doua folosim relaţiile

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \ldots,\ S = pr = \frac{abc}{4R}.$$

Partea a doua devine:

$$4R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 4(R + r).$$

10.134. 1°. Ţinem seamă că $b\sin C = c\sin B$, $b^2\sin 2C - c^2\sin 2B = 2b\cos C\sin B - 2c\cos B\sin C = 2bc(\sin B\cos C - \cos C\sin B) = 2bc\sin(B - C)$.

2°. Folosim relaţiile: $a = b\cos C + c\cos B$; $b\sin C - c\sin B = 0$. Ridicîndu-le la pătrat şi scăzîndu-le obţinem succesiv:

$a^2 = b^2\cos^2 C + 2bc\cos B\cos C + c^2\cos^2 B - b^2\sin^2 C + 2bc\sin B\sin C - c^2\sin^2 B = b^2(\cos^2 C - \sin^2 C) + c^2(\cos^2 B - \sin^2 B) + 2bc(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B - C)$ şi relaţia s-a stabilit.

3°. Folosim relațiile ușor de justificat:

$$a \cos A = c \cos (B - A) - b \cos B.$$
$$a \sin A = b \sin B - c \sin (B - A).$$

Dublul produs al acestor două relații este:

$$2 a^2 \sin A \cos A = abc \sin B \cos (B - A) - 2 b^2 \sin B \cos B -$$
$$- 2 c^2 \sin (B - A) \cos (B - A) + 2 bc \cos B \sin (B - A),$$

de unde rezultă ultima identitate cerută.

10.135. Distanța $IG = r$. Fie M și D mijloacele segmentelor BD și AG, iar E, F punctele de contact cu BC și AC. Avem $AD = DG = GM$.

$$IG^2 = \frac{ID^2 - IM^2}{2} - MG^2 = \frac{ID^2 + IE^2 + (MC - CE)^2}{2} - \frac{AM^2}{9}$$

$$ID^2 = \frac{IG^2 + IA^2}{2} - GD^2 = \frac{IG^2 + IA^2}{2} - \frac{AM^2}{9},$$

De unde rezultă:

$$3IG^2 = IA^2 - \frac{2AM^2}{3} + 2r^2 + \frac{(b - c)^2}{2}; \text{ însă}$$

$$IA^2 = IF^2 + AD^2 = r^2 + \frac{(b + c - a)^2}{4} \text{ și } AM^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

11.1. Se obține $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$ și de aici $\varphi = 45°$.

11.2. $$S = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}.$$

11.3. $$A_{lat} = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3}\sec\alpha\,(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}).$$

11.4. Se obține $V = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ și de aici $V = 58{,}6\ \text{dm}^3$.

11.5. $$\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{tg}y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

11.6. Se obține:
$$S = a^2\sec^2\alpha\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

11.7. $A = a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$.

11.8. Din cauză că fețele laterale ale trunchiului sînt egal înclinate pe bază, piciorul perpendicularei dusă din vîrful piramidei din care face parte trunchiul este egal depărtat de laturile trapezului.

$$A = \frac{2(a+b)(1-k^2)\sqrt{ab}}{\cos\varphi};\quad V = \frac{2ab(a+b)(1-k^3)}{3}\operatorname{tg}\varphi.$$

11.9. $d = R\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

11.10. Se obține $\frac{l\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{2}} = l\sin\alpha\sin^2\varphi$,

unde φ se determină din egalitatea:

$$\operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

11.11. $A_{tot} = \pi Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

11.12. $V = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

11.13 Se obține:

$V = \frac{R^2 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos\alpha \cos\beta}$ și de aici $V = 302$ dm³.

11.14. Fie dodecaedrul convex regulat cu fețele înscrise în cercul de rază egală cu unitatea și așezat cu una din fețe pe un plan P. Desfacem una din fețele alăturate și prin rotire în jurul laturii din planul P și o așezăm în acest plan. Notăm cu x distanța de la axa de rotație, la proiecția pe planul P a diagonalei paralelă cu axa de rotație a feței înainte de rotire, iar cu y distanța la această diagonală.

Avem $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{x}{y}$.

Notăm cu a_5' apotema pentagonului stelat înscris în cercul de rază unitatea.

$$\frac{a_5'}{l_5'} = \frac{a_5}{l_5}; \quad x = (l_5' - l_5)\frac{a_5}{l_5}.$$

Fie z apotema pentagonului regulat înscris în cercul de rază unitatea. Avem:

$$z = \cos 2\varphi; \ \cos\varphi = a_5; \ z = 2a_5^2 - 1.$$

$$y = a_5 + z = 2a_5^2 + a_5 - 1; \ \cos\alpha = -\frac{a_5(l_5 - l_5')}{l_5(2a_5^2 + a_5 - 1)}.$$

11.15. *Soluția I.*

Luăm $CM = CN = a$; fie M' și N' proiecțiile lui M și N pe AB. Avem: $MM' = a\sin\alpha$, $CM' = a\cos\alpha$, $NN' = a\sin\beta$, $CN' = a\cos\beta$, deci $M'N' = a\,|\cos\alpha - \cos\beta|$

$$MN'^2 = MM'^2 + M'N^2 = MM'^2 + M'N'^2 + NN'^2 = a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta) = 2a^2(1 - \cos\alpha\cos\beta).$$

Pe de altă parte

$MN^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\varphi = 2a^2(1 - \cos\varphi)$ și rezultă $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$.

Soluția II. Fie $M'P \perp CN$. Conform teoremei celor 3 perpendiculare și $MP \perp CN$.

$$CP = CM'\cos\beta = a\cos\alpha\cos\beta, \text{ de asemenea:}$$
$$CP = a\cos\varphi, \text{ deci } \cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta.$$

11.16. Avem $VA_2 \perp B_1C_1$; $VB_2 \perp A_1C_1$ și $VC_1 \perp A_1A_2$, iar $VH \perp (A_1B_1C_1)$, unde AA_2, BB_2, CC_2 sînt înălțimi.

$$VA_2 = \frac{h_a}{2} = \frac{b\sin C}{2} = R\sin B\sin C.$$

$$AH = h_a' = \frac{AB_2}{\sin C} = \frac{c\cos A}{\sin C} = 2R\cos A$$

$$A_2H = h_a - h_a' = 2R(\sin B\sin C - \cos A) =$$

$$= 2R[\sin B\sin C + \cos(B+C)] = 2R\cos B\cos C$$

$$\cos\alpha = \frac{h_a' - \frac{h_a}{2}}{\frac{h_a}{2}} = \frac{2\cos A - \sin B\sin C}{\sin B\sin C} =$$

$$= 1 - 2\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C} = \frac{2\cos A}{\sin B\sin C} - 1 = 1 - 2\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C,$$

deoarece $\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B\cos C + \sin B\sin C$.

b) Înălțimea VH a tetraedrului este:

$$VH = \sqrt{\left(\frac{h_a}{2}\right)^2 - \left(h_a' - \frac{h_a}{2}\right)^2} = R\sqrt{|\sin^2 B\sin^2 C - 2(\cos A - \sin B\sin C)^2|} =$$

$$= 2R\sqrt{|\cos A\cos B\cos C|}$$

$$S = \text{aria}\,(A_1B_1C_1) = 2\left(\frac{R}{2}\right)^2 \sin A\sin B\sin C,$$

de unde

$$V = \frac{S\cdot VH}{3} = \frac{1}{3}R^3\sin A\sin B\sin C\sqrt{|\cos A\cos B\cos C|}.$$

11.17. Fie piramida $VA_1A_2\ldots A_n$, în care O este centrul poligonului de bază, M mijlocul lui A_1A_2, cu N mijlocul lui A_2A_n. Notăm cu a, R, m, A, h, respectiv apotema și raza poligonului de bază, muchia, apotema și înălțimea piramidei.

Avem $y = 2\sphericalangle MPA_2$, unde P este piciorul perpendicularei din A_2 pe VA_1, deci:

$$\sin\frac{y}{2} = \frac{NA_2}{PA_2} = \frac{am}{AR}, \text{ deoarece:}$$

$$A\cdot A_1A_2 = m\cdot PA_2 \text{ și } a\cdot A_1A_2 = NA_2\cdot R$$

$$\cos\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{A^2R^2 - a^2m^2}{A^2\cdot R^2}} = \frac{A_1A_2\cdot h}{2A\cdot R}, \text{ deoarece:}$$

$$m^2 = R^2 + h^2 \text{ și } A^2 - a^2 = h^2;\ R^2 - a^2 = \frac{A_1A_2^2}{4},$$

însă $h = A . \sin x$ şi $A_1A_2 = 2R \sin \frac{\pi}{n}$, deci:

$$\cos \frac{y}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \sin x .$$

11.18. Fie α unghiul cerut. $h = G \sin \alpha$, G este generatoarea

$$R - r = h \operatorname{ctg} \alpha; \; R + r = G ,$$

ultima relaţie fiind dedusă din condiţia de inscriptibilitate.

$$\frac{\pi}{6} h \, (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{4\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} ; \text{ de unde:}$$

$$R^2 + r^2 = \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha + G^2}{2} ; \; Rr = \frac{G^2 - h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4} ,$$

$$\frac{G^2 \cos^2\alpha + 3G^2}{4} = G^2\sin^2\alpha; \; 3 + \cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ sau } \operatorname{tg}\alpha = 2; \; \alpha = 63°26'10''.$$

11.19. Se duce conul circular drept cu vîrful în A şi generatoarele înclinate de un unghi α pe planul P. Latura BC fiind egală cu generatoarea trebuie să ducem în cercul de bază o coardă de lungime cunoscută paralelă cu direcţia dată.

Dacă r este raza cercului de bază a conului, atunci:

$$BC < 2r; \text{ însă } BC = AC; \; r = AC \cos \alpha, \text{ deci:}$$

$$AC < 2AC \cos \alpha; \; \cos \alpha > \frac{1}{2} , \text{ adică } \alpha < 60° .$$

11.20. Avem $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a_6}{A_6}$, unde $a_6 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ apotema hexagonului de latură l, iar $A_6 = \frac{l\operatorname{tg}\gamma}{2}$ apotema piramidei.

Prin urmare:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\gamma} ; \; \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2} = \frac{3}{\operatorname{tg}^2\gamma} ,$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{a_6}{l\sin\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\gamma} ,$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos \beta}{2} = \frac{3}{4\sin^2 \gamma} ; \text{ deci:}$$

$$\frac{1-\cos \alpha}{1-\cos \beta} = 4 \cos^2\gamma ,$$

11.21. Avem:

$$S_1 = S_2 \cos(S_1S_2) + S_3\cos(S_1S_3) + S_4\cos(S_1S_4),$$
$$S_2 = S_1 \cos(S_1S_2) + S_3 \cos(S_2S_3) + S_4 \cos(S_2S_4),$$
$$S_3 = S_1 \cos(S_1S_3) + S_2 \cos(S_2S_3) + S_4 \cos(S_3S_4),$$
$$S_4 = S_1 \cos(S_1S_4) + S_2 (S_2S_4) + S_3 \cos(S_3S_4).$$

Înmulțim aceste relații respectiv cu S_1, S_2, S_3, S_4 și scăzînd ultimele trei din prima, se obține relația cerută.

11.22. Volumul piramidei $VBDE$ este

$$\frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\,OE\ h\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{6}\,ah\cdot OE\cos\alpha.$$

În triunghiul EOC avem:

$$\frac{OE}{\sin(VCO)} = \frac{OC}{\sin(OEC)} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin(90^\circ - \alpha + \sphericalangle OVE)} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos(\alpha - \sphericalangle OVE)} = \ldots$$

de unde $OE = \dfrac{ah\sqrt{2}}{2h\cos\alpha + a\sqrt{2}\sin\alpha}$.

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2h^2}{2h + a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}.$$

11.23. Fie C' proiecția lui C pe planul (P). Ducem $CC'' \perp BB'$ și avem:

$$BC'' = |BB' - CC'| \text{ sau}$$
$$BC\sin\alpha = |AB\sin\gamma - AC\sin\beta|.$$

Împărțind cu $2R$, obținem:

$$\sin A\sin\alpha = |\sin C\sin\gamma - \sin B\sin\beta|.$$

Mai avem:

$$\cos\varphi = \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AC'}{AC}\cdot\frac{\sin(B'AC')}{\sin A},$$

$\sin A\cos\varphi = \cos\gamma\cos\beta\sin(B'AC')$.

11.24. Avem $BC = AD = a$, $CA = BD = b$, $AB = CD = c$ și fie MN bimediana laturilor AC și BD, iar G centrul de greutate. $GM = GN$, MN este perpendiculară pe AC și BD.

$$MN^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2);\quad MG^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{8},$$

$$R^2 = AG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8};$$

$$\sin^2\beta = \frac{MG^2}{R^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

11.25. $OA^2 = OV^2 \mathrm{tg}^2\alpha$ și analogele.

Fie I_a centrul cercului exînscris tangent laturii BC.

$$\sphericalangle ABI_a = B + \frac{1}{2}(180° - B) = 90° + \frac{B}{2};\ \sphericalangle AI_aB = \frac{C}{2}.$$

$$AI_a = \frac{AB\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \sqrt{\frac{bc\,p}{p-a}};\ BI_a = \sqrt{\frac{ac\,(p-c)}{p-a}};$$

$$BI_a = OI_a\cos\frac{C}{2},\ \text{de unde } OI_a = a\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}.$$

$$OA = AI_a - OI_a = \sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}};\ OA^2 = \frac{bc\,(p-a)}{p},\ \ldots$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{bc\,(p-a)}{pOV^2}.\ \text{Rezultă:}$$

$$\sum\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{bc} = \frac{1}{OV^2}\left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right) = \frac{1}{OV^2}.$$

11.26. Fie h înălțimea piramidei și R raza cercului circumscris bazei. Avem:

$$m = 2R\sin\frac{180°}{n},\ h^2 = m'^2 - R^2 > 0 \text{ sau}$$

$$m'^2 - \frac{m^2}{4\sin^2\frac{180°}{n}} > 0;\ \frac{m'}{m} > \frac{1}{2\sin\frac{180°}{n}},$$

$$\frac{m}{m'} < 2\sin\frac{180°}{n}.$$

11.27. Folosim relația $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$ și relația cunoscută $3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2$, unde înlocuim pe x cu $\cos\alpha$, $y = \cos\beta$ și $z = \cos\gamma$.

11.28. Avem $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ sau

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos\beta\cos\gamma\left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right).$$

Rezultă:

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cdot\Pi\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right),$$

însă $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} > 2$. Rezultă apoi inegalitatea cerută.

11.29. $S = \dfrac{(R^2 - r^2)\sin\varphi}{2\cos\beta}$.

11.30. $V = \dfrac{7}{6}\pi\, l^3 \sin 2\varphi \cos\varphi$.

11.31. $A_{lat} = \dfrac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$.

11.32. $\sin\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ și de aici $\alpha = 52°32'$.

11.33. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{m-n}{m+n}$ și de aici:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ deci } \alpha = 60°.$$

11.34. $V = \dfrac{2\pi h^3}{\sin(\alpha+\beta)}\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$.

11.35. Fie n numărul laturilor, R raza cercului circumscris și $x = \dfrac{\pi}{n}$. Avem $AB = 2R\sin x$; $AC = 2R\sin 2x$ și $AD = 2R\sin 3x$. Relația dată devine ecuația :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x} \text{ sau pentru } \sin x \neq 0.$$

$$\sin 3x + \sin 2x = 2\sin 3x . \cos x = \sin 4x + \sin 2x$$

$$\text{sau } \sin 3x - \sin 4x = 0,\ 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = k\pi,\ x = 2k\pi, \text{ nu convine}; \frac{7x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$x = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{7};\ x = \frac{\pi}{7};\ \frac{3\pi}{7};\ \frac{5\pi}{7}.$$

$x = \dfrac{\pi}{n}$, unde $n \geqslant 3$ convine numai $n = 7$, deci poligonul regulat cerut are 7 laturi.

11.36. Notăm cu A', B', C' proiecțiile lui V' piciorul înălțimii VV' a etraedr ului, respectiv pe laturile BC, CA, AB.

Fie S aria triunghiului ABC și h înălțimea VV'.

$$S = \frac{1}{2}(ah\operatorname{ctg}\alpha + bh\operatorname{ctg}\beta = + ch\operatorname{ctg}\gamma):$$

deci
$$h = \frac{2S}{a\operatorname{ctg}\alpha + b\operatorname{ctg}\beta + c\operatorname{ctg}\gamma}.$$

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a\operatorname{ctg}\alpha + b\operatorname{ctg}\beta + c\operatorname{ctg}\gamma}.$$

11.37. Fie M un punct pe muchia A_1A_3. Planul perpendicular în M pe A_1A_3 taie pe A_1A_2 în N şi pe A_1A_4 în P.

$$\cos x = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2\, MN \cdot MP}\text{; iar}$$

$$NP^2 = A_1N^2 + A_1P^2 - 2A_1N \cdot A_1P \cos \alpha.$$

Obţinem
$$\cos x = \frac{A_1N \cdot A_1P \cos \alpha - A_1M^2}{MN \cdot MP},$$

sau
$$\cos x = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Capitolul 12

12.1. a) Avem $EF = AF - AE = AD\cos x - AB\cos a$.

$$\frac{AC}{\sin[180^\circ - (a+x)]} = \frac{AD}{\sin A} = \frac{CD}{\sin x}, \text{ de unde:}$$

$$AD = \frac{m\sin a}{\sin(a+x)} \text{ și } AB = CD = \frac{m\sin x}{\sin(a+x)}. \text{ Rezultă:}$$

$$EF = \frac{m\sin(a-x)}{\sin(a+x)}.$$

b)
$$\operatorname{tg} x = \frac{DF}{AF} = \frac{FC\operatorname{tg} a}{AF} = \frac{\operatorname{tg} a}{2}.$$

c) Pe una din laturile unghiului a luăm un punct M și proiecția sa P pe cealaltă latură a unghiului a. Avem $\operatorname{tg} a = \frac{MP}{OP}$ și $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} a}{2} = \frac{MP}{2\,OP}$.

12.2. Adunăm și scădem prima și ultima ecuație

$$A_1 + C_1 = A + C.$$

$$A_1 - C_1 = (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha, \text{ de unde:}$$

$$A_1 = \frac{(A+C) - (A-C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha}{2}.$$

$$C_1 = \frac{(A+C) - (A-C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha}{2}.$$

Deci:

$$A_1C_1 = \frac{(A+C)^2 - [(A-C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha]^2}{4}.$$

Efectuînd, obținem:

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

12.3. Transformăm în produse:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos 2x + \cos x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin 2x + \sin 2x$$

sau

$$\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1\right](\cos 2x-\sin 2x)=0, \text{ de unde:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{2};\ x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}.$$

$$\cos 2x-\sin 2x=0;\quad \operatorname{tg} 2x=1;\quad x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}.$$

12.4. Avem $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{b+c-a}{b+c+a}}$ şi analogele

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\frac{2(a+b+c)-(a+b+c)}{a+b+c}=1.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

12.6. Folosim relaţiile $a=2R\sin A$ şi analogele şi relaţia

$$\Sigma \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B=1.$$

12.7. $E=[\cos(2\pi-x)+i\sin(2\pi-x)](\cos 5x+i\sin 5x)=$
$=\cos(2\pi+4x)+i\sin(2\pi+4x)$, $\sin(2\pi+4x)=\sin 4x=0$;

$$x=k\frac{\pi}{4},\ k \text{ întreg}.$$

12.8.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)},$$

rezultă $\frac{x+y+z}{2}=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, sau $x+y+z=(2k+1)\pi$.

12.10. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60°=b^2+c^2-2bc$, deci:

$$b^2+c^2=a^2+bc.$$

$$\sin^2 B-\sin^2 C=\sin(B+C)\sin(B-C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(B-C).$$

12.11. Notăm $\sphericalangle MAN=\alpha$ şi $n=2p+1$, rezultă $MN=\frac{a}{n}$.

Exprimăm aria triunghiului MAN în două moduri:

$$\frac{1}{2}MN\times AH=\frac{1}{2}AM\times AN\sin\alpha, \text{ de unde:}$$

(1) $$AM \times AN \sin\alpha = \frac{ah}{n}; \quad BM = NC = \frac{ap}{2p+1}.$$

Mediana AO a ipotenuzei este și mediana laturii MN, deci:

$$4 \cdot AO^2 = 2(AM^2 + AN) - MN^2, \text{ de unde:}$$

$$AM^2 + AN^2 = \frac{a^2(n^2+1)}{2n^2}.$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul MAN,

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cos\alpha \text{ sau}$$

(2) $AM \cdot AN \cos\alpha = \dfrac{a^2(n-1)}{4n^2}$. Împărțim (1) cu (2) și obținem relația cerută.

12.12. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos^4 4x}{2} = 1 + \cos x \cos 3x$

sau $\cos x \ \cos 3x + \cos^2 3x = 0$;

$$\cos 3x(\cos 3x + \cos x) = 2\cos x \cos 2x \cos 3x = 0;$$

$$\cos x = 0, \ x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos 2x = 0, \ x_2 = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ și } \cos 3x = 0, \ x_3 = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

Soluții distincte sînt:

$$x' = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ și } x'' = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

12.13. *Soluția I.* Avem $2E \sin\dfrac{\pi}{7} = \sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{3\pi}{7} + \sin\dfrac{\pi}{7} +$ $+ \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{2\pi}{7} = \sin\dfrac{\pi}{7}$; deci $E = \dfrac{1}{2}$.

Soluția II. Rădăcinile ecuației:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^7-1}{x-1} = 0 \text{ sînt}$$

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}, \text{ unde } k = 1, 2, 3, \ldots, 6.$$

Mai avem:

$$(x - x_k)(x - x_{7-k}) = \left(x - \cos\frac{2k\pi}{7} - i\sin\frac{2k\pi}{7}\right) \cdot$$

$$\left(x - \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}\right) = x^2 + 1 - 2x\cos\frac{2k\pi}{7}.$$

Notăm $1 + x^2 = y$. Avem:

$$\frac{x^7-1}{x-1} \equiv \left(y - 2x\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(y - 2x\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(y - 2x\cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$

$$= y^3 - y^2 \times 2x\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) +$$

$$+ y \cdot 4x^2 \left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \ldots\right) - 8x^3 \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Ținînd seama că y nu poate avea decît puteri pare ale lui x, singurul termen care conține pe x^5 este al doilea, deci:

$$1 = -2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right), \text{ deci:}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Generalizarea se face plecînd de la $\frac{x^{2k+1}-1}{x-1} = 0$ și se obține:

$$\sum(-1)^{k-1}\cos\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{1}{2}.$$

Soluția III. Notînd $\cos\frac{\pi}{7} = x$, obținem:

$$4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}, \text{ deci } 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\cos\pi + 1 = 0; \text{ deci } \cos 7\frac{\pi}{7} + 1 = 0$$

$$\cos 7a = 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos 3a - 7\cos a$$

și se ajunge la ecuația:

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = 0, \text{ care conține și ecuația:}$$

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

cu rădăcina $x = \cos\frac{\pi}{7}$.

12.14. Unghiul interior este $\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$ și deci unghiul exterior este $\frac{2\pi}{n}$.

Alegem drept axă Ox latura a_1, iar Oy o perpendiculară pe ea. Latura a_2 face cu Ox unghiul α, latura a_3, unghiul 2α, iar latura a_n unghiul $(n-1)\alpha$. Se observă că între sinusurile unghiurilor de proiecție avem:

$\sin(n-1)\alpha = -\sin\alpha$; $\sin(n-2)\alpha = -\sin 2\alpha$ etc. Dacă poligonul are un număr par de laturi, atunci latura $a_{\frac{n}{2}+1}$ este paralelă cu a_1, deoarece $\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{n} = \pi$. Poligonul are proiecţia nulă fiindcă se închide.

Se obţine:

$$(a_2 - a_n)\sin\frac{2\pi}{n} + (a_3 - a_{n-1})\sin\frac{4\pi}{n} + \ldots = 0.$$

Fiecare termen fiind pozitiv, rezultă $a_2 = a_n$; $a_3 = a_{n-1}$; $a_4 = a_{n-2}$ etc.

Dacă am fi ales ca axă Ox latura a_2, atunci rezultă că $a_1 = a_3$; $a_n = 4$, $a_{n-1} = a_5$ etc.

Repetînd operaţia, se deduce că $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

12.16. Se va folosi următoarea teoremă referitoare la maxime şi minime trigonometrice: Dacă suma a două arce variabile pozitive este constantă şi mai mică decît $\frac{\pi}{2}$, produsul tangentelor acestor arce este maximum cînd arcele sînt egale. a) $\sqrt{3}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

12.17. a) Avem $\cos(4x - 82°) = \sin(90° - 4x + 82°) = \sin(172° - 4x) = \sin(180° - 8° - 4x) = \sin(4x + 8°)$.

Prima inegalitate devine:

$$\frac{3}{2} \leqslant 2\sin^2(4x + 8°) \leqslant 2, \text{ cum } 13° \leqslant x \leqslant 28°,$$

$$60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120° \text{ deci } \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(4x + 8°) \leqslant 1,$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

b) $$\operatorname{tg}(4x - 82°) = -\operatorname{ctg}(4x + 8°), \text{ însă:}$$

$$60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°, \text{ deci } |\operatorname{ctg}(4x + 8°)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Inegalitatea dublă obţinută:

$$0 \leqslant 2\operatorname{ctg}^2(4x + 8°) \leqslant \frac{2}{3} \text{ este evidentă.}$$

12.18. a) Notăm $6x = y$. Să arătăm că dacă $0 \leqslant y \leqslant 60°$, atunci $\frac{3}{4} \leqslant \sin(y + 60°)\cos(y - 30°) \leqslant 1$ sau

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin(y + 60°)\cos(30° - y) \leqslant 1,$$

$\frac{3}{4} \leqslant \sin^2(y + 60°) \leqslant 1$, care este adevărată, deoarece valoarea cea mai mică a lui $y = \sin^2(y + 60°)$ este $\sin^2 60° = \frac{3}{4}$, cînd $y = 0$, sau $y = 60°$, iar valoarea maximă cînd $y + 60° = 90°$, adică $\sin^2 90° = 1$.

b) Fie $9x \doteq y$, avem $0 \leqslant y \leqslant 90°$, iar:

$$f(y) = \sin(y + 45)\cos(45 - y) = \sin^2(y + 45°).$$

Pentru $y = 0$ sau $y = 90°$ avem $f(y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Pentru $y = 45°$ avem $f(y) = 1$.

c) Ultima pentru $0 \leqslant y \leqslant 90°$ devine:

$$f(y) = -\sin(45° - y)\cos(45° + y) = -\sin^2(45° - y).$$

Cea mai mare valoare a lui $f(y)$ poate fi zero, şi anume cînd $y = 45°$.

Cînd y creşte de la 0 la 45°, atunci $(45 - y)$ descreşte de la 45° la 0; iar cînd $45° \leqslant y \leqslant 90°$, atunci $0 \geqslant (45° - y) \geqslant -45°$. Cea mai mică valoare a lui $f(y)$ este cînd $y = 0$ sau $y = 90°$, $f(x) = -\sin^2 45 = -\frac{1}{2}$.

12.19. Avem:

$$g(\sin x) = g\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right) = f\left(\frac{2\sin x}{1 + \sin^2 x}\right).$$

12.20. Se notează cu $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ vectorii de poziţie ale punctelor A şi B.

Putem scrie:

$\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Se ridică la pătrat şi avem:

$$\overline{AB}^2 = \bar{r}^2_2 + \bar{r}^2_1 - 2\bar{r}_2\,\bar{r}_1 \qquad (1)$$

Dacă notăm cu α unghiul dintre vectorii $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ (1) devine:

$$AB^2 = r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 \cdot r_1 \cos\alpha, \text{ de unde:}$$

$$\cos\alpha = \frac{r_2^2 + r_1^2 - AB^2}{2r_1\,r_2}. \text{ Avem apoi:}$$

$$AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10},$$

$$r_1 = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$r_2 = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

şi deci:

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{255}} ; \ \alpha = \arccos \frac{6}{\sqrt{255}}.$$

12.21. Avem $\sphericalangle (\overline{AB}, \ \overline{r_1}) = \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{377}}\right)$

$$\sphericalangle (\overline{AB}, \ \overline{r_2}) = \arccos \left(\frac{25}{\sqrt{986}}\right).$$

12.22. Avem $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, care înmulţită scalar cu ea însăşi, conduce la:

$$\overline{c}^2 = (\overline{a} + \overline{b})^2 = a^2 + b^2 + 2a\,b \cos (a, \ b)$$

şi deci:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \ (a, \ b)}.$$

12.23. $\overline{a} \ \overline{b} = -5.$

12.24. $\frac{\pi}{4}$.

12.25. $A = \frac{\pi}{2}$; $B = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$ şi

$$c = \arccos \frac{5\pi}{5}.$$

12.26. Avem:

$$|\overline{A} + \overline{B}| = 15$$

$$|\overline{A} - \overline{B}| = \sqrt{593} \cong 24{,}35.$$

12.27. Se ştie de la produsul scalar că $\overline{a}^2 = a^2$, a fiind $|\overline{a}|$ şi deci $\overline{a}^2 \cdot a = a^3$.

12.28. Se ţine seama de proprietatea de asociativitate a unui produs scalar.

12.29. Se ţine seama de proprietatea de distributivitate şi de proprietatea de comutativitate a produsului scalar a doi vectori.

12.30. Se ţine seama că $b = |\overline{b}|$.

12.31. Dacă $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$, atunci vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ pot fi consideraţi ca laturile unui triunghi echilateral, deci unghiurile dintre fiecare doi vectori vor fi egali cu 120° şi deci:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = -\frac{3}{2}.$$

12.32. Se aplică fiecărei paranteze pătratul scalar al unei sume şi al unei diferenţe de doi vectori.

Se verifică și vectorial că suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor sale.

12.33. Unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un unghi exterior triunghiului; unghiul interior alăturat se va nota cu C și se obține:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

12.34. Se va exprima vectorial medianele în funcție de vectorii situați pe catete.

Se va găsi apoi $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, unde φ este unghiul dintre mediane.

12.35. Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ fiind laturile unui romb, rezultă că $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. Se va arăta apoi că produsul scalar al diagonalelor este egal cu zero.

12.36. Se exprimă produsul scalar dintre vectorii $\bar{c}$ și $\bar{p}$ și se ține seama de proprietățile produsului scalar. Se va obține $\bar{p} \cdot \bar{c} = 0$.

12.37. $m = 40$.

12.38. Se scrie produsul scalar între vectorii $\bar{p}$ și $\bar{q}$, se ține seama că $|\bar{s}| = 1$ și $|\bar{t}| = 1$ și că $\bar{p} \cdot \bar{q} = 0$ și se obține:

$$\sphericalangle (\bar{s}, \bar{t}) = \frac{\pi}{3}.$$

12.39. Avem:

$$pr_{\bar{b}}\, \bar{a} = 2; \cos (\bar{b}, \bar{m}) = \frac{5}{13} \text{ și}$$

$$\cos (\bar{b}, \bar{n}) = \frac{12}{13}.$$

12.40. Se va lua în planul axelor xOy vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ care fac cu sensul pozitiv al axei Ox, respectiv, unghiurile α și $(-\beta)$.

Cei doi vectori se vor exprima astfel:

$$\bar{a} = a (\cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{j})$$

$$\bar{b} = b (\cos \beta \cdot \bar{i} + \sin \beta \cdot \bar{j}).$$

Se calculează apoi cosinusul unghiului dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și obținem:

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a \cdot b} = \frac{ab (\cos \alpha . \bar{i} + \sin \alpha . \bar{j}) \cdot (\cos \beta \bar{i} - \sin \beta . \bar{j})}{ab} =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

12.41. Se va lua în planul axelor xOy vectorii a și b de aceeași parte a axei Ox și fie α și β unghiurile pe care le fac vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$, respectiv, cu sensul pozitiv al axei Ox.

Cei doi vectori a și b vor avea expresiile:

$$\bar{a} = a(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\cdot\bar{j})$$

$$\bar{b} = b(\cos\beta\cdot\bar{i} + \sin\beta\cdot\bar{j}).$$

Se calculează apoi unghiul dintre cei doi vectori și avem:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b} = \frac{ab(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j})(\cos\beta\,\bar{i} + \sin\beta\,\bar{j})}{ab} =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

12.42. $$E = \frac{2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x}{2\sin 2x\sin x} = \frac{\cos x - 1}{\sin x} =$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

12.44. Transformăm în produse:

$$E = \frac{\sin 3x\sin 11x}{\sin x\sin 11x} = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{\sin x(3 - 4\sin^2 x)}{\sin x} =$$

$$= 3 - 4\sin^2 x, \text{ unde } x \neq k\pi.$$

$$E = 0 \text{ pentru } x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$E = 2(\cos 2x + \cos 60°) = 2\left(1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{2}\right) = 3 - 4\sin^2 x.$$

12.45. $\sin 70° = \cos 20°$, $\sin 260° = -\sin 80° = -\cos 10°$;

$\cos 280° = \cos(360° - 280°) = \cos 80° = \sin 10°$, deci:

$$E = \cos 20°\cos 50° - \sin 10°\cos 10° = \frac{1}{2}(\cos 70° + \cos 30 - \sin 20°) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

12.46. *Soluția I.* Folosim relațiile:

$$\sin\frac{(B - C)}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(B - C)}{2}};\quad \cos\frac{B - C}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos(B - C)}{2}}.$$

Partea a doua devine:

$$\frac{\sqrt{1 - \cos B\cos C - \sin B\sin C}\,(1 + \cos B\cos C + \sin B\sin C)}{\cos B\cos C}.$$

Folosind apoi relațiile $\cos B = \frac{c}{a}$, $\sin B = \frac{b}{a}$,... și relația $b^2 + c^2 = a^2$, obținem partea întîi.

Soluția II. Folosim relațiile $a=2R\sin A$ și analogele. Ținînd seama că $\sin A=\sin(B+C)=1$, $\sin B=\cos C$, partea întîi se transformă în partea a doua.

12.47. Folosim identitatea:

$$\sin^2 a-\sin^2 b=\sin(a+b)\sin(a-b).$$

Prima parte devine:

$$E=\sin(45°+x+30°-x)\sin(45°+x-30°+x)-\sin 15°\cos(15°+$$
$$+2x)=\sin 75°\sin(15°+2x)-\cos 75°\cos(15°+2x)=$$
$$=-\cos(2x+90°)=\sin 2x.$$

12.48. Dezvoltăm $\sin(2a+b)$ și $\sin(a+2b)$, alungăm numitorii și înlocuim în funcția de $\sin a$ și $\sin b$.

$$\sin 2a\cos b\sin b+\cos 2a\sin^2 b+\sin^2 a\cos 2b+\cos a\sin 2b\sin a-$$
$$-4\cos a\cos b\sin a\sin b+4\sin^2 a\sin^2 b=2\sin a\cos a\sin b\cos b+$$
$$+(1-2\sin^2 a)\sin^2 b+\sin^2 a(1-2\sin^2 b)+2\cos a\sin a\sin b\cos b-$$
$$-4\cos a\cos b\sin a\sin b+4\sin^2 a\sin^2 b=\sin^2 a+\sin^2 b$$
$$\operatorname{cosec} a\operatorname{cosec} b(\sin^2 a+\sin^2 b)\sin a\sin b=\sin^2 a+\sin^2 b.$$

12.49. $$E=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}-\frac{\sin(a+b)}{\cos c\cos(a+b+c)}=$$

$$=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)}[\cos c\cos(a+b+c)-\cos a\cos b].$$

De asemenea:

$$\cos c\cos(a+b+c)-\cos a\cos b=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(a+b+2c+\cos(a+b)-\cos(a-b)-\cos(a+b)]=$$

$$=\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a).$$

12.50. $$E=\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}\right)=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)=\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\left[\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right]=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}\left[\left|\sin\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right|\right]=2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\left|\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|=$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Pentru $x=60°$ avem $E=2\sqrt[4]{3}\cos 15°=\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

12.51. Aducem la acelaşi numitor:

$$E = \frac{\cos\left(a - \frac{\pi}{4} - a - \frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(a + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(a + \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

12.52. Ecuaţia se mai scrie:

$$\sin 9x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$2\sin 7x \cos 2x = \cos 2x \text{ sau}$$

$$\cos 2x\,(2\sin 7x - 1) = 0, \text{ de unde:}$$

$$x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{4};\ x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{42} + \frac{k\pi}{7}.$$

12.53. Avem $\cos 2x + \cos 4x = 2\cos 3x \cos x$, deci ecuaţia se scrie:

$$\cos x\,(1 + 2\cos 3x) = 0, \quad \text{de unde:}$$

$$\cos x = 0;\ x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ şi}$$

$$\cos 3x = -\frac{1}{2};\ 3x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\text{de unde } x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{9},\ k \in z.$$

12.54. a) Avem $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$, deci:

$$\cos 2x\,(\cos 2x + 2\cos x) = 0$$

$$\cos 2x = 0, \text{ cu rădăcinile } x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x + 2\cos x = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0;$$

$$\cos x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \text{ deoarece } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1 \text{ nu convine.}$$

b) Ecuaţia a doua se mai scrie:

$$1 + \cos x + \sin x\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0,$$

$$(1 + \cos x)\cos x + \sin x\,(1 + \cos x) = 0,$$

$$(1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0, \text{ deci:}$$

$$1 + \cos x = 0;\ x_1 = (2k+1)\pi,$$

$$\sin x + \cos x = 0; \qquad x_2 = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

12.55. Avem $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Ecuaţia se mai scrie:

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0,$$

$$\cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1) = 0.$$

Rădăcinile sînt date de ecuaţiile:

$$\cos x = 0 \text{ şi } \cos x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0.$$

12.56. a) Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2, \text{ de unde } \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3};$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

b) $$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

12.57. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$E = \sin^2 11x - \sin^2 x + \sin^2 9x - \sin^2 3x + \sin^2 7x - \sin^2 5x = 0.$$

Folosim formula $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b)\sin(a - b)$.

$$E = \sin 12x(\sin 10x + \sin 6x + \sin 2x) = 0 \quad \text{sau}$$

$$E = \sin 12x \sin 6x(1 + 2\cos 4x) = 0, \text{ de unde:}$$

$\sin 12x = 0$; $x_1 = \frac{k\pi}{12}$, care conţine şi soluţiile ecuaţiei $\sin 6x = 0$.

Ecuaţia $1 + 2\cos 4x = 0$ are rădăcinile:

$$x_2 = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

12.58. Folosim relaţia $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = a^2,$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 + 1 - a^2 = 2 - a^2,$$

$$\sin x - \cos x = \pm\sqrt{2 - a^2}. \text{ De unde:}$$

$$\sin x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2};\ \cos x = \frac{a \mp \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Rădăcinile sînt reale dacă $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

b) Dacă $a = -1$, obţinem $\sin x = -1$, $\cos x = 0$ sau $\cos x = -1$, $\sin x = 0$, adică $x_1 = 180°$ şi $x_2 = 270°$ sau

$$x = 360k + 225° \pm 45°.$$

12.59. Ecuaţia se mai scrie:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = a(\cos x - \sin x) \quad \text{sau}$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - a) = 0. \text{ De unde:}$$

$$\cos x = \sin x \text{ cu soluţia } x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$\cos x + \sin x = a$, de unde rezultă $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, în care caz mai avem $\sin 2x = 1 - a^2$;

$$2x = k\pi \pm \arcsin(1 - a^2).$$

12.60. a) Avem $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x = m(1 - \sin 2x)$;

$$2\sin^2 2x - m\sin 2x + m - 2 = 0; \ \sin 2x = 1,$$

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}; \ \sin 2x = \frac{m-2}{2};$$

b) $$-1 \leqslant \frac{m-2}{2} \leqslant 1; \quad m \in [0,4].$$

12.61. *Soluţia I.* $2\cos x \leqslant |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|$ (1)

$$|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leqslant \sqrt{2}. \quad (2)$$

a) Dacă $\cos x \leqslant 0$, adică $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ (1) este verificată.

b) Dacă $\cos x \geqslant 0$, adică $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$,

ambii termeni ai ecuaţiei (1) sînt pozitivi şi prin ridicare la pătrat se obţine o relaţie echivalentă cu (1).

$$4\cos^2 x \leqslant 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x},$$

sau $|\cos 2x| \leqslant 1 - 2\cos^2 x$; $|\cos 2x| \leqslant -\cos 2x$, care nu este posibilă decît cu semnul egal, dacă $\cos 2x \leqslant 0$, deci pentru $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, căci $2x$ poate lua valori în intervalul $[0, 4\pi]$.

Ţinînd seama de rezultatele de la a) şi b), rezultă că valorile lui x care satisfac (1) sînt date de:

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

c) Din relaţia (2) prin ridicare la pătrat, obţinem

$$2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} \leqslant 2 \quad \text{sau} -2|\cos 2x| \leqslant 0,$$

care este verificată.

12.62. Ecuaţia se poate scrie:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x\right) = \cos(\pi \sin x) \text{ sau}$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi \cos x = 2k\pi \pm \pi \sin x.$$

1) Pentru $\frac{\pi}{2} - \pi \cos x = 2k\pi + \pi \sin x$, avem:

$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} - 2k = \frac{1-4k}{2}$, cu condiţia k întreg şi $-\sqrt{2} <$

$< \frac{1-4k}{2} < \sqrt{2}$, deci $k = 0$, adică $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$.

2) Pentru $\frac{\pi}{2} - \pi$; $\cos x = 2k\pi - \pi \sin x$, avem:

$$\sin x - \cos x = \frac{4k-1}{2},\ k = 0, \text{ deci:}$$

$$\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}.$$

12.63. Folosim relaţiile $a = 2R \sin A$ şi analogele:

$$2 \sin A = \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

Folosind şi relaţia $\sin A = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, obţinem:

$2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}$; iar relaţia a doua devine:

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

12.69. Avem:

$$\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{\sin C}. \text{ Se obţine:}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cos 15°}.$$

Rezultă

$$A = 105° 30' \text{ şi } B = 44° 30'.$$

12.70. a) Avem $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\sin x = \frac{3}{5}$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;

$\cos 2x = \frac{7}{25}$. $\sin 3x = \frac{117}{125}$; $\cos 3x = \cos(2x + x) = \frac{44}{125}$.

$$E_1 = \frac{312}{125};\quad E_2 = \frac{64}{125}.$$

b) $E_1 = 2\cos x(\sin 2x - \sin x) = 4\cos x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$, sau

$E_1 = 2\sin 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 2\sin 2x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)$.

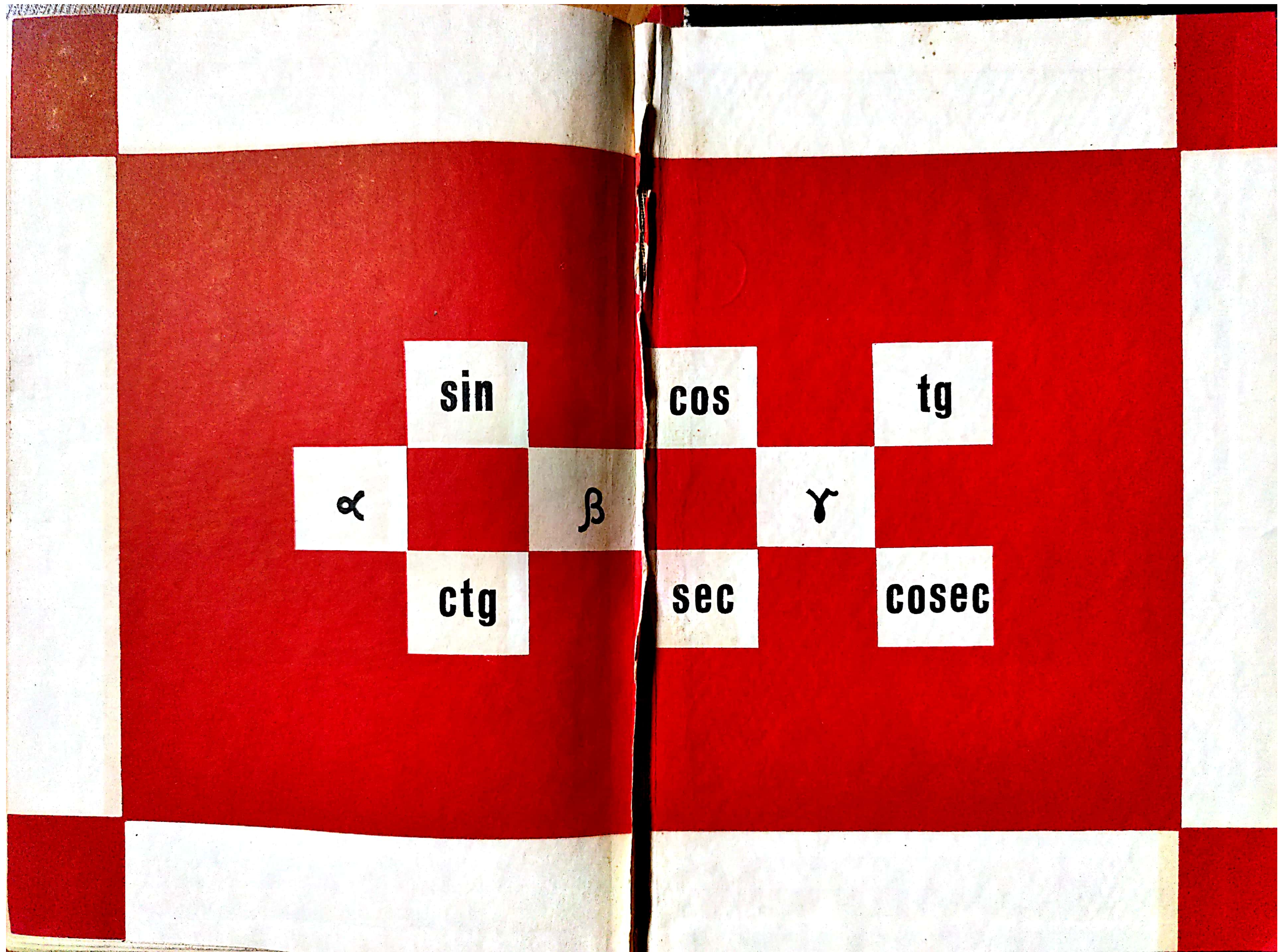
$E_2 = 2\cos 2x \cos x - 2\sin x \cos x = 2\cos x(\cos 2x - \sin x) =$

$= 2\cos x\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin x\right] = 4\cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

c) $\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$; $2\sin 2x \cos x = 2\cos 2x \cos x$

$$\cos x(\sin 2x - \cos 2x) = 0;\quad \cos x = 0,\quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1;\quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$


sin
cos
tg
α
β
γ
ctg
sec
cosec